ONDES : LA PROPAGATION DES SIGNAUX

« J'allai au bord de la rivière, j'ai toujours aimé l'eau et le doux mouvement des vagues qui se poussent; elle était paisible, les nénuphars blancs tremblaient au bruit du courant, les flots se déroulaient lentement, se déployant les uns sur les autres; au milieu, les îles laissaient retomber dans l'eau leurs touffes de verdure, la rive semblait sourire, on n'entendait rien que la voix des ondes.»
Gustave Flaubert (1821-1880), extrait de *Novembre* (1842)

Les ondulations sur un étang, la vibration d'une corde de guitare, le son doux d'une flûte, un tremblement de terre, les couleurs d'un arc-en-ciel sont des exemples **d'ondes**.
Une onde se manifeste quand un **système est perturbé par rapport à sa situation d'équilibre** et quand cette **perturbation peut se propager d'une région du système à une autre avec une vitesse donnée.**

Sur l'image ci-dessus, la surfeuse, qui glisse sur l'onde qu'est la vague, entend en même temps les ondes acoustiques et voit les ondes de lumière.

I – Le modèle des ondes

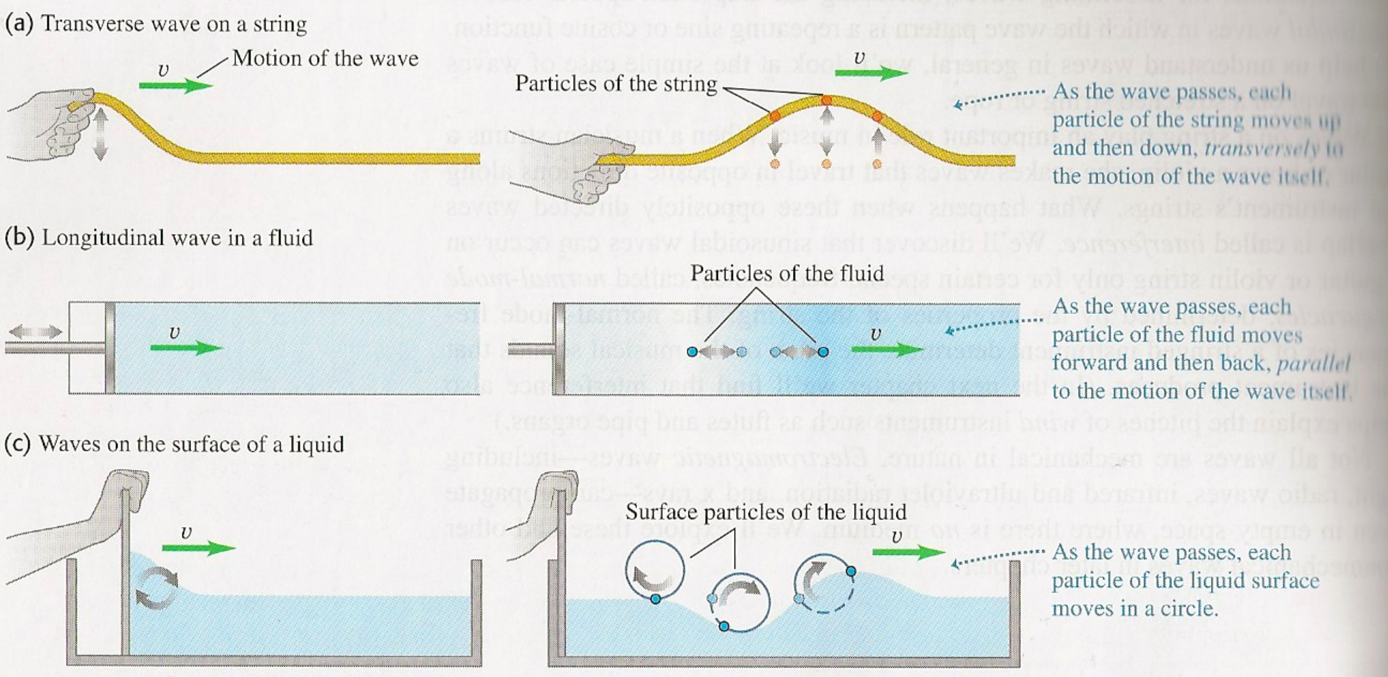
1.1 Classification des ondes suivant la nature physique de l'onde

On peut classer dans un premier temps les ondes en trois catégories :

1- ***LES ONDES MECANIQUES***. Dans cette catégorie, les ondes se propagent dans **un milieu matériel** tel que l'air, l'eau ou les solides. Le son ou les vagues à la surface de l'eau sont deux exemples familiers d'ondes mécaniques. Quand la perturbation se propage dans le milieu matériel, les particules constituant ce milieu subissent divers déplacements par rapport à leur position d'équilibre selon la nature de l'onde (cd. Figure 15.1). En PTSI, nous allons essentiellement parler des ondes mécaniques.

Note : L'onde, la perturbation, se propage dans le milieu mais ce dernier dans son ensemble ne se propage pas. Les particules du milieu oscillent autour d'une position d'équilibre, elles restent donc localisées autour de cette position. **Une onde transporte de l'énergie à partir de l'origine de la perturbation du milieu mais ne transporte pas de matière.** La matière reste localisée autour de sa position initiale, **l'onde se propage, la matière oscille**.

15.1 Three ways to make a wave that moves to the right. (a) The hand moves the string up and then returns, producing a transverse wave. (b) The piston moves to the right, compressing the gas or liquid, and then returns, producing a longitudinal wave. (c) The board moves to the right and then returns, producing a combination of longitudinal and transverse waves.



2- ***LES ONDES ELECTROMAGNETIQUES***, du domaine des ondes radio, du visible aux rayons X sont des oscillations auto-entretenues du champ électromagnétique. Les ondes électromagnétiques **ne requièrent aucun milieu matériel pour se propager et peuvent donc voyager dans le vide**. La lumière du soleil se propage dans le vide et met environ 8 mn pour apporter son énergie sur Terre. Les ondes électromagnétiques seront étudiées en détail dans le cours de PT (Electromagnétisme et optique physique).

3- ***LES ONDES DE MATIERE***. Ces ondes vous sont certainement moins familières. Elles sont associées aux particules du monde atomique et subatomique comme le proton, le neutron, l'électron, le quark etc. Ces particules peuvent exhiber des propriétés physiques qui sont caractéristiques des ondes comme les interférences et la diffraction. Nous parlerons des ondes de matière dans le chapitre consacré à l'introduction au monde quantique.

Quelle que soit la nature physique de l'onde, il faut retenir la propriété essentielle suivante commune à toutes les ondes :

Une onde transporte de l'énergie dans l'espace à partir de l'origine de la perturbation mais ne transporte pas de matière.

1.2 Classification des ondes suivant la nature du mouvement de la grandeur physique qui subit la perturbation lors de la propagation de l'onde

On peut aussi classer les ondes mécaniques et les ondes électromagnétiques en deux nouvelles catégories suivant la direction du mouvement de la perturbation par rapport à la direction de propagation de l'onde dans son ensemble.

1-***LES ONDES TRANSVERSALES.*** Dans ces dernières, les particules du milieu, pour les ondes mécaniques, ont **un mouvement perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde**. C'est le cas d'une onde progressive sur une corde comme illustré sur la figure 15-1 a). Les ondes électromagnétiques (dont la lumière est une composante) sont aussi transversales car le champ électromagnétique oscille de façon perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde (cf. cours de PT).

2-***LES ONDES LONGITUDINALES.*** Dans ces dernières, les particules du milieu, pour les ondes mécaniques, ont **un mouvement parallèle par rapport à la direction de propagation de l'onde**. C'est le cas d'une onde de pression dans un fluide (le son) comme illustré sur la figure 15-1 b).

Dans la figure 15-1 c), les ondes à la surface d'un liquide, comme les vagues sur la mer, sont à la fois des ondes transversales et longitudinales. En effet, les particules de matière, les molécules d'eau à la surface, décrivent des cercles quand elles sont atteintes par l'onde. Ce cercle peut être décrit comme la somme, la superposition, d'un mouvement transversal et d'un mouvement longitudinal.

Note : Dans les trois exemples de la figure 15-1, la perturbation se propage avec une vitesse v parfaitement définie dans le milieu. Il s'agit de la vitesse de l'onde. Par contre, les particules du milieu oscillent par rapport à leur position d'équilibre avec une vitesse différente de la vitesse de l'onde. Il ne faudra pas confondre ces deux vitesses ainsi que le mouvement des particules et la propagation de la perturbation.

II – Onde progressive unidimensionnelle du type ébranlement

2.1 Position du problème

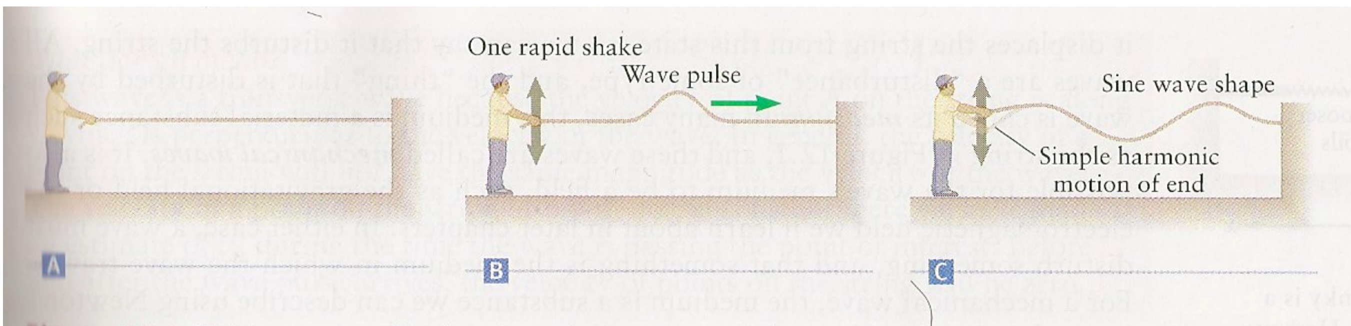
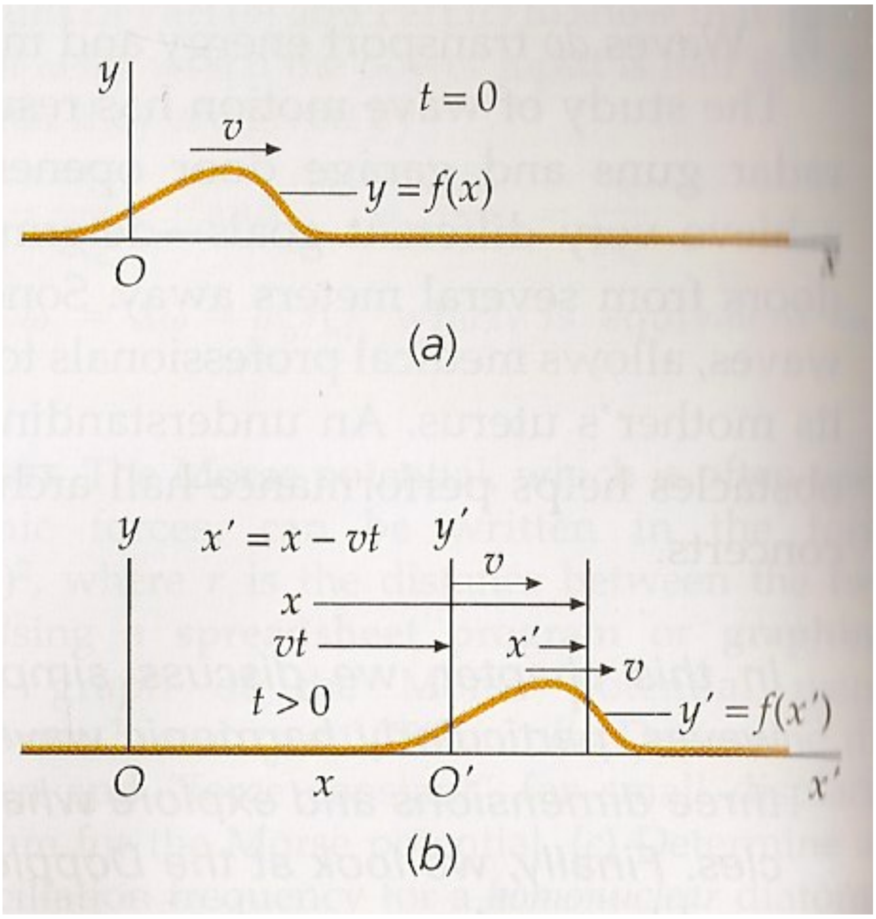


Figure 12.1 A A long string. B When the end of a string is shaken once up and down (vertically), a wave pulse that travels horizontally along the string is generated. C Repeated shaking of the string generates a periodic wave.

Nous allons considérer la propagation d'une onde de type ébranlement (ou impulsion, « pulse » en anglais, on peut aussi simplement dire signal) le long d'une corde (cf figure 12.1 a et b). Pour cela, il suffit de donner une rapide secousse en un aller-retour sur une corde tendue. La déformation ainsi générée va se propager le long de la corde. La forme de cette déformation peut être quelconque.

.



2.2 Aspect de la corde à un instant donné

La figure (a) ci-dessus montre la perturbation de la corde à un instant $t=0$. La forme de la corde à cet instant peut être représentée par une fonction mathématique $y=f(x)$. Un instant plus tard, figure (b), l'impulsion s'est propagée et se trouve plus loin.

Dans un nouveau système de coordonnées avec pour origine O' qui se déplace à la même vitesse v que l'ébranlement, ce dernier est stationnaire. Dans ce nouveau repère, la forme de la corde est décrite par une fonction $y=f(x')$ à chaque instant. Les coordonnées x et x' sont reliées par $x'=x-vt$ ainsi $f(x')=f(x-vt)$.

Finalement, la forme de la corde (sa hauteur) à un instant t et à un endroit x dans le repère d'origine O est décrite par :

$$y=f(x-vt) \quad \text{onde se propageant dans la direction +x}$$

Un raisonnement analogue pour un ébranlement se propageant vers la gauche donne :

$$y=g(x+vt) \quad \text{onde se propageant dans la direction -x}$$

Dans l'exemple de la corde, la grandeur physique qui subit la perturbation lors de la propagation de l'onde est la hauteur de la corde par rapport à sa position horizontale au repos. Pour d'autres ondes, la grandeur physique peut être la pression lors de la propagation d'une onde sonore dans l'air, le champ électromagnétique pour la lumière, la hauteur des vagues pour des ondes de surface etc…

De façon générale, nous noterons $S(x,t)$ (pour signal) **la variation de la grandeur physique à la position** x **et à l'instant** t **par rapport à sa valeur d'équilibre lors du passage de l'onde unidimensionnelle.** $S(x,t)$ **s'appelle la FONCTION D'ONDE[1].** Les résultats précédents obtenus pour le cas de la corde sont tout à fait généraux et nous retiendrons :

<u>Soit une onde se propageant d'un point O à un point M.</u>

A un instant t, la perturbation $S(x,t)$ d'un point M d'abcisse x est la même que celle qu'avait le point d'abcisse $(x-vt)$ à l'instant initial $t=0$ soit:

$$S(x,t)=f_{t=0}(x-vt)\ \Big\}\Rightarrow \text{onde se propageant dans la direction } +x$$

$$S(x,t)=g_{t=0}(x+vt)\ \Big\}\Rightarrow \text{onde se propageant dans la direction } -x$$

<u>2.3 Equation horaire d'un point donné de la corde</u>

On peut aussi raisonner en disant que la hauteur de la corde y en x et à l'instant t est la même que la hauteur de la corde en $x=0$ mais à l'instant $t-x/v$ puisque la corde a mis le temps x/v pour aller de $x=0$ à x quelconque. On peut écrire :

$$y=f(t-x/v) \quad \text{onde se propageant dans la direction +x}$$

Un raisonnement analogue pour un ébranlement se propageant vers la gauche donne :

$$y=g(t+x/v) \quad \text{onde se propageant dans la direction −x}$$

Nous retiendrons :

<u>Soit une onde se propageant d'un point O à un point M.</u>

La perturbation $S(x,t)$ d'un point M d'abcisse x à un instant t est la même que celle qu'avait le point d'origine O à l'instant $t-x/v$, x/v mesurant la durée mise par l'onde pour parcourir la distance OM soit:

$$S(x,t)=f_{x=0}(t-x/v)\ \Big\}\Rightarrow \text{onde se propageant dans la direction } +x$$

$$S(x,t)=g_{x=0}(t+x/v)\ \Big\}\Rightarrow \text{onde se propageant dans la direction } -x$$

<u>Note :</u> L'expression mathématique des fonctions f et g dépend de la forme de l'onde qui se propage (forme triangulaire, rectangulaire, tordue etc…). Dans ce cours, nous allons nous consacrer aux **formes sinusoïdales (ou harmoniques, les deux termes sont synonymes)**. En effet, les fonctions harmoniques jouent un rôle central en mathématiques et en physique comme nous le verrons.

[1] Il n'y a pas de notation universelle pour la fonction d'onde, cela dépend de la nature de l'onde étudiée, des auteurs etc… Cependant, pour les ondes de matière (cf. cours sur la physique quantique), la notation utilisée par tout le monde est la lettre grecque psi ψ .

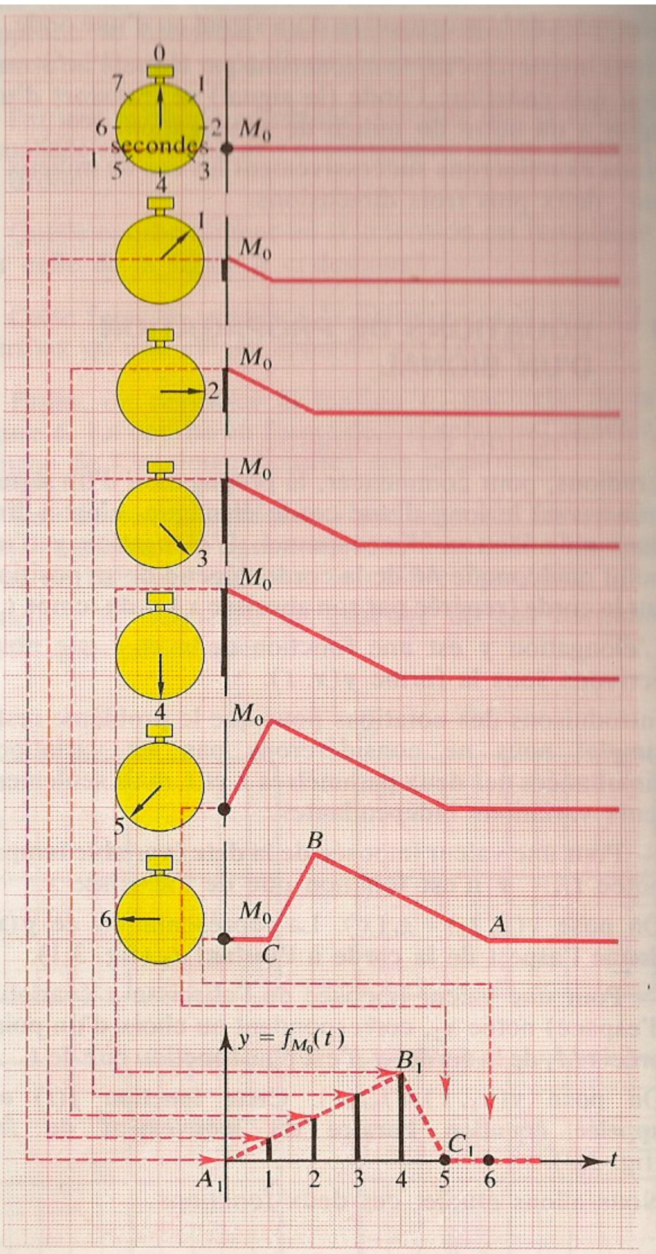


Fig. 3.5 — *Recherche de l'équation horaire de la source.*
La séquence des schémas relate la naissance de la déformation de la corde (au point M_0).
En bas, représentation graphique de l'équation horaire du point M_0.

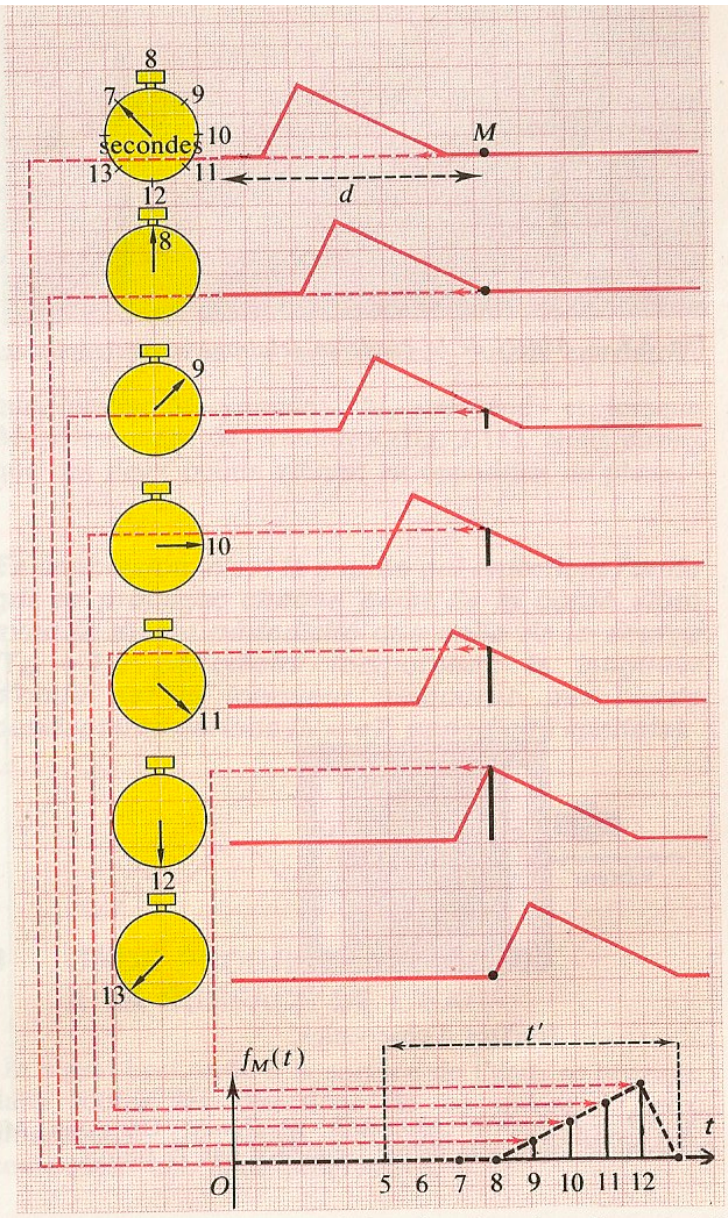
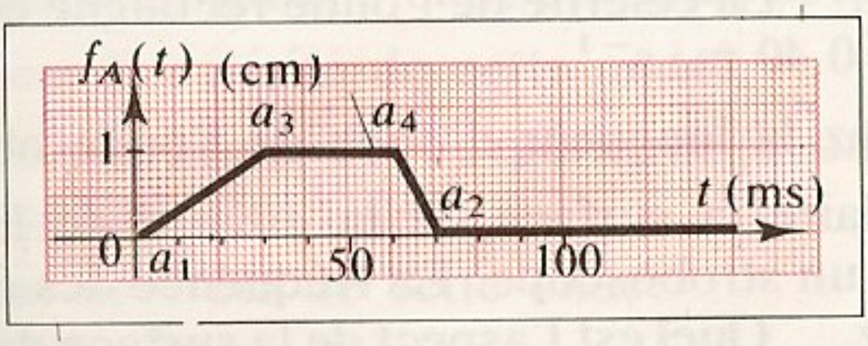


Fig. 3.6 — *Recherche de l'équation horaire d'un point quelconque.*
La séquence des schémas relate la déformation de la corde au point M.
En bas, représentation graphique de l'équation horaire du point M.

Exercice d'application 1

La célérité d'un signal transversal se déplaçant le long d'une corde élastique est $c = 6{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Le point A, extrémité de la corde, subit un ébranlement transversal dont l'équation horaire est donnée de façon simplifiée par la représentation graphique de la figure ci-dessous.



1) Représentez graphiquement l'équation horaire de l'ébranlement que subit le point B situé à la distance $d = 1{,}24$ m du point A.

2) Dessinez l'aspect de la corde à l'instant

$$t_1 = 0{,}150 \text{ s}.$$

2.4 Vitesse de l'onde

La vitesse de propagation d'une onde dépend des propriétés physiques du milieu dans lequel elle se propage. La vitesse d'une onde sur une corde, pour peu que **les amplitudes de la déformation ne soient pas trop importantes**, est donnée par :

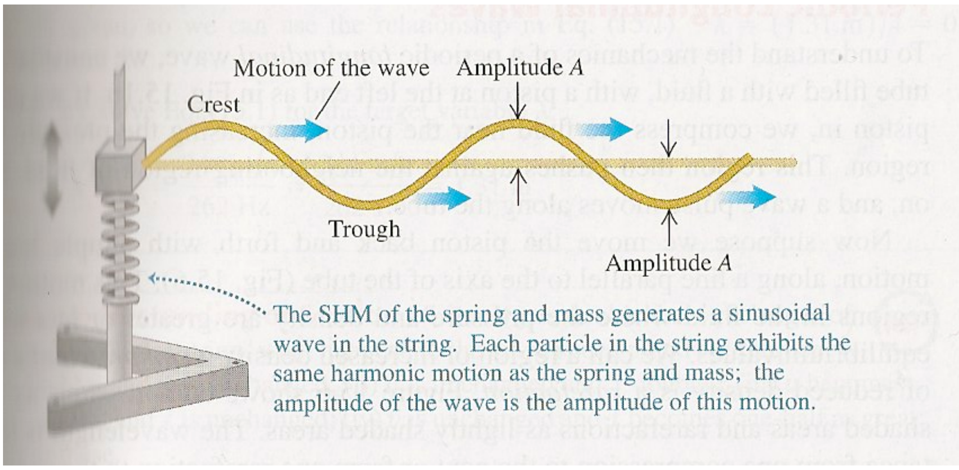
$$\boxed{v = \sqrt{F_T/\mu} \rightarrow \text{vitesse d'une onde transverse sur une corde}}$$

où F_T est **la tension** dans la corde en Newton et $\mu = m/\ell$ la masse par unité de longueur en kg.m^{-1}. Avant d'établir en guise d'exercice cette relation (dont la connaissance n'est pas exigible dans le programme) plus tard dans le cours de mécanique, on peut analyser qualitativement cette relation. Quand la tension augmente, la vitesse augmente, ce qui paraît raisonnable, et plus la masse linéique de la corde est grande, plus il y a de l'inertie dans la corde et plus la vitesse de propagation de l'onde sera lente comme attendue. D'une façon plus générale, la vitesse d'une onde mécanique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$v = \sqrt{\frac{\text{Force de rappel pour ramener le système à l'équilibre}}{\text{terme d'inertie qui résiste au retour à l'équilibre}}}$$

III – Onde progressive harmonique unidimensionnelle

3.1 Onde progressive harmonique transversale



15.3 A block of mass *m* attached to a spring undergoes simple harmonic motion, producing a sinusoidal wave that travels to the right on the string. (In a real-life system a driving force would have to be applied to the block to replace the energy carried away by the wave.)

A présent nous allons exciter une corde à l'une de ses extrémités de façon répétitive, c'est-à-dire de façon **périodique** (cf. figure 15.3 et 12.1 c). En particulier, la corde va être excitée d'une façon **harmonique**, mouvement périodique caractérisé par (revoir le cours de PTSI sur l'oscillateur harmonique) :

$\rightarrow T$ la période en s.

$\rightarrow f \equiv \dfrac{1}{T}$ la fréquence en s^{-1} ou Hz, caractérise le nombre de périodes ou cycles par seconde.

$\rightarrow \omega \equiv 2\pi f \equiv \dfrac{2\pi}{T}$ la pulsation en rad.s^{-1}, caractérise le nombre de radians parcourus par seconde.

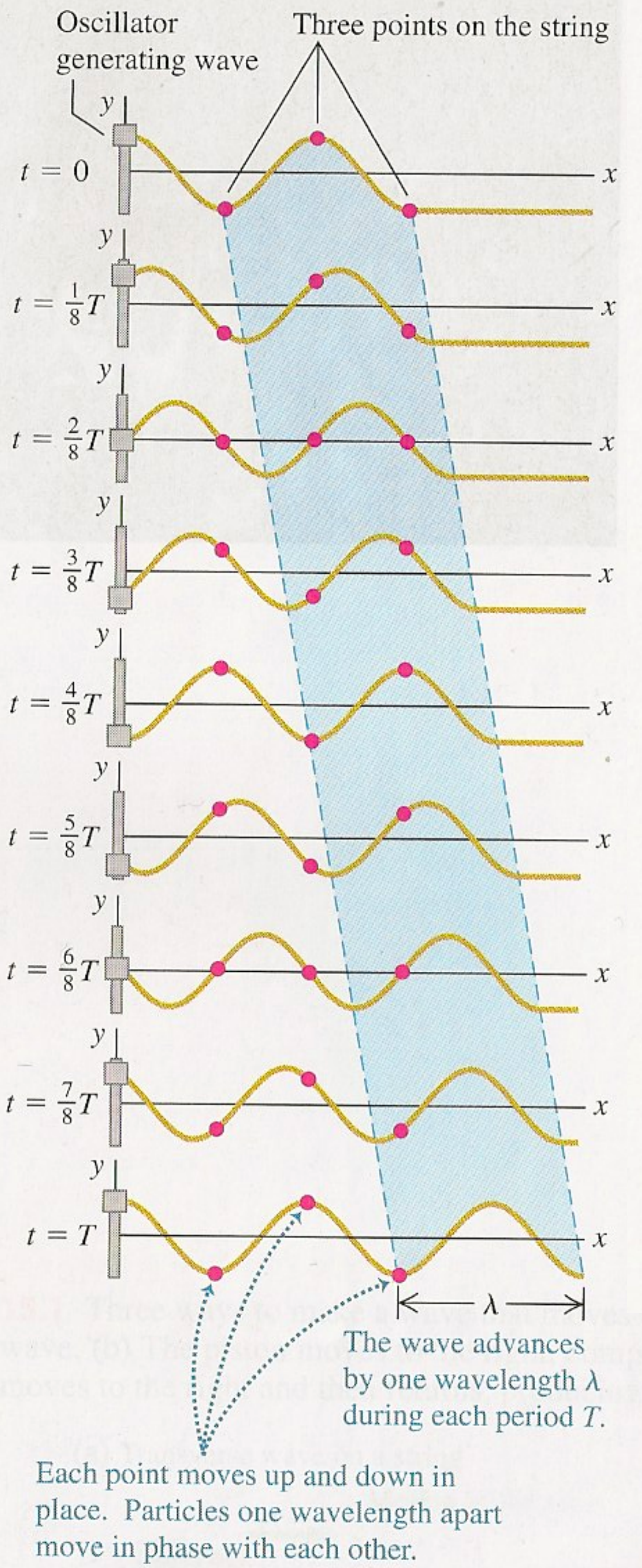
(Lorsque l'on décrit une période, sur un cercle on a parcouru 2π rad)

Ainsi une onde sinusoïdale va se développer et se propager sur la corde avec une succession de crêtes et de creux (cf. figure 15.3). La figure 15.4 montre l'allure de la corde à différents instants en fonction de la période d'excitation. On constate que, lorsque l'onde se propage dans le milieu, chaque point de la corde décrit un mouvement harmonique simple de période T. Mais il reste à la même côte x. Pendant cette période, une même ondulation (grisée dans la figure 15.4) se déplace d'une distance appelée **longueur d'onde** (en m) et notée généralement par λ. L'onde se propage à la vitesse v, ***il s'agit de la vitesse de phase de l'onde***, et se déplace donc d'une longueur λ pendant une période T. On arrive donc à une relation fondamentale caractéristique des ondes :

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \text{ ou } \lambda = vT = \frac{v}{f}}$$

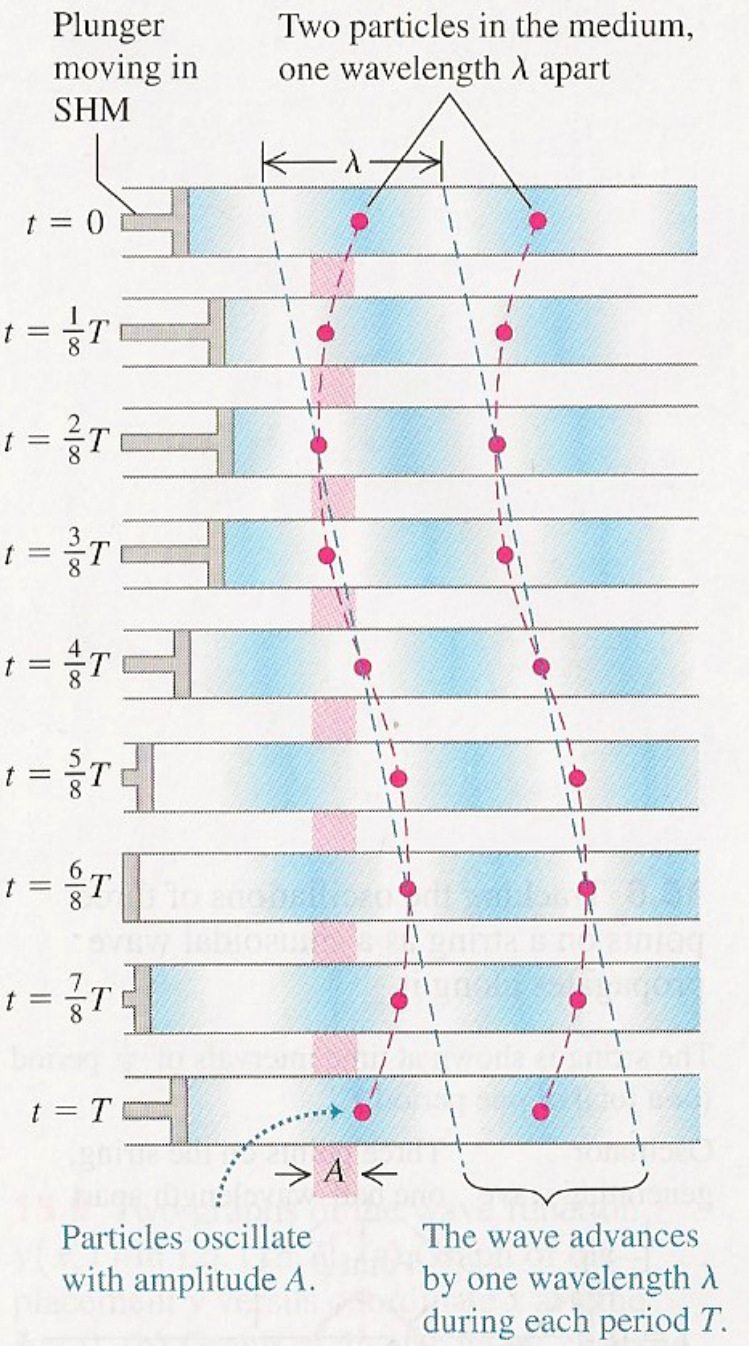
15.4 A sinusoidal transverse wave traveling to the right along a string. The vertical scale is exaggerated.

The string is shown at time intervals of $\frac{1}{8}$ period for a total of one period T. The highlighting shows the motion of one wavelength of the wave.



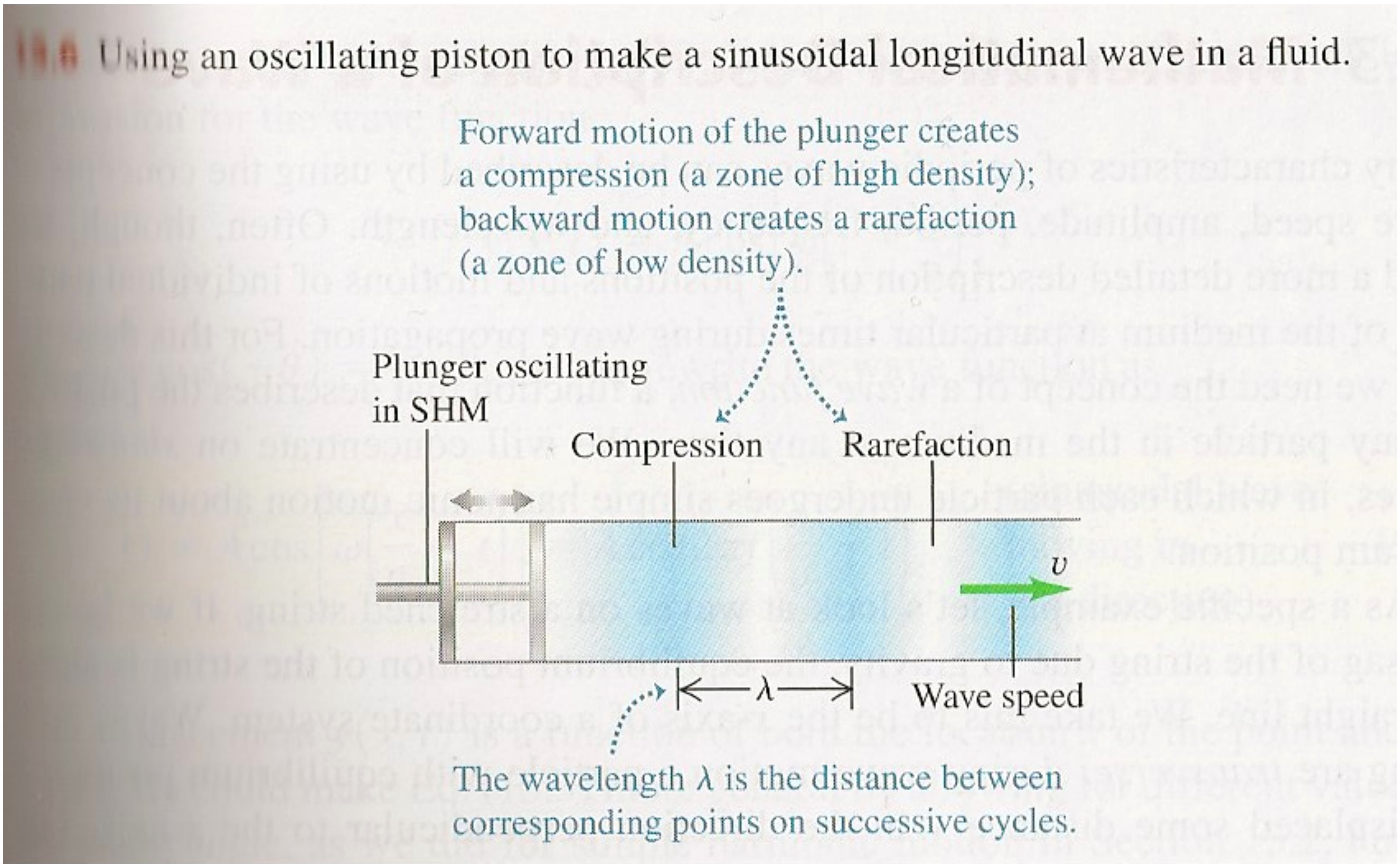
15.7 A sinusoidal longitudinal wave traveling to the right in a fluid. The wave has the same amplitude A and period T as the oscillation of the piston.

Longitudinal waves are shown at intervals of $\frac{1}{8}T$ for one period T.



Remarque sur la dispersion: La période, ou la fréquence, est une grandeur intrinsèque de l'onde (elle dépend juste de la période d'excitation responsable de la production de l'onde). ***Par contre la longueur d'onde λ dépend de la vitesse de propagation de l'onde***. Dans les ondes mécaniques que l'on considère, la vitesse de phase de l'onde v ne dépend que des propriétés physiques du milieu dans lequel elle se propage***, la vitesse est donc la même pour toutes les fréquences f, on dit que le milieu est non dispersif***. Ce n'est pas le cas de la lumière dont la vitesse de propagation dans un milieu physique, comme le verre, dépend de sa fréquence comme nous l'avons vu dans le cours d'optique.

3.2 Onde progressive harmonique longitudinale



Dans la figure 15.6 ci-dessus, on déplace de façon périodique un piston dans un cylindre contenant un fluide (de l'air ou un liquide). Ceci va générer dans le cylindre une onde de pression, ou onde sonore, longitudinale. La grandeur qui subit une perturbation harmonique n'est plus le déplacement transversal de la corde par rapport à sa position d'équilibre mais la pression à l'intérieur du fluide par rapport à la pression d'équilibre. On va donc observer **une suite de compression (surpression) et raréfaction (sous pression) du fluide** (cf. figure 15.7). Chaque molécule du fluide va osciller à la période T par rapport à sa position d'équilibre lors du passage de l'onde. Par contre une zone de compression (ou de raréfaction) va se propager à la vitesse v de l'onde et, pendant une période T, se déplace d'une **longueur d'onde** λ. On a donc toujours la relation importante $\lambda = vT$ valable pour toutes les ondes (transverses et longitudinales).

Figure 16.5 Longitudinal wave pulse propagating along a spring.

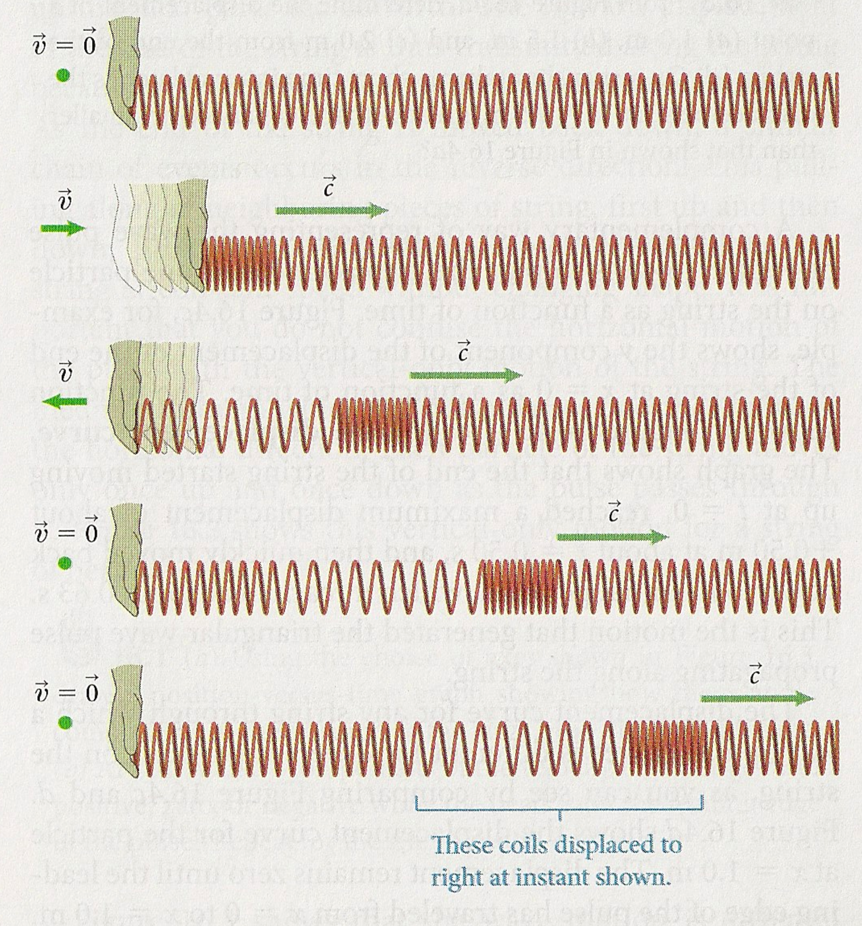
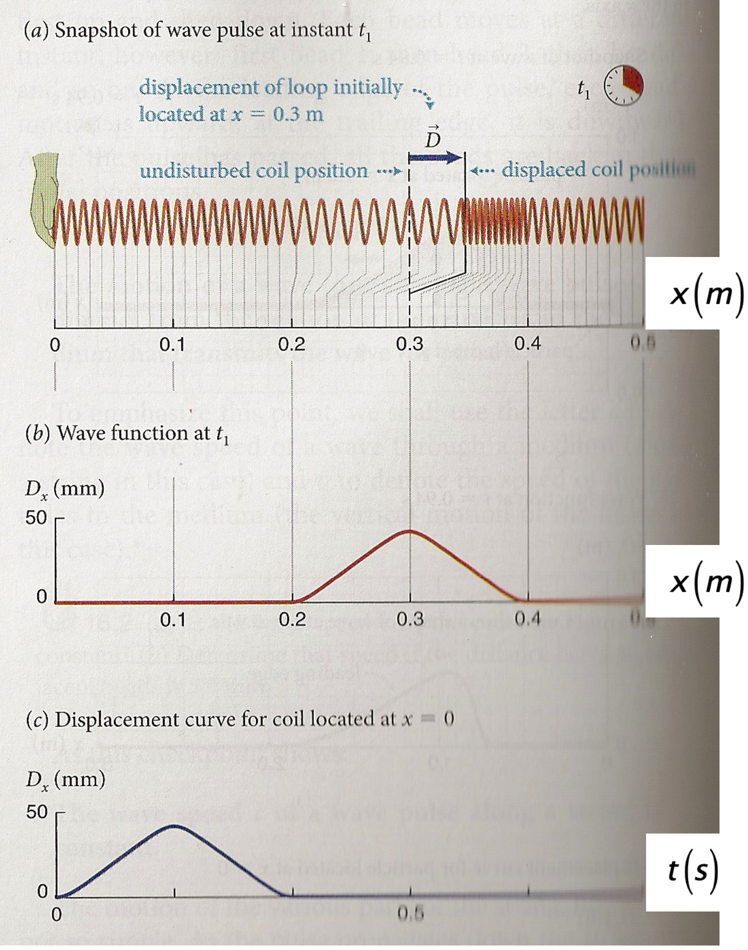


Figure 16.6 Wave function and displacement curve for a longitudinal wave pulse propagating along a spring.



3.3 Description mathématique

Revenons à la figure 15.4 et à la propagation de l'onde transversale sur la corde. A l'origine $x=0$ la corde est excitée de façon périodique et le déplacement transversal de cette dernière est donné par :

$$y(x=0,t)=A\cos(\omega t)=A\cos(2\pi f\,t)$$

où A est l'amplitude de l'excitation (valeur maximale de $y(x=0,t)$). Remarquez que l'on aurait pu travailler avec une fonction $\sin$, cela ne change rien physiquement. Pour avoir la valeur du déplacement transverse de la corde à une côte quelconque x et à l'instant t, il suffit de remplacer t par $t-x/v$ comme nous l'avons vu dans le paragraphe II. Cela donne :

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]=A\cos\left[2\pi f\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]$$

Comme cos est une fonction paire, $\cos(x)=\cos(-x)$, on peut écrire :

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{v}-t\right)\right]=A\cos\left[2\pi f\left(\frac{x}{v}-t\right)\right] \quad \text{Onde harmonique progressive suivant } +x$$

Comme $T=1/f$ et $\lambda=v/f$, on peut aussi écrire :

$$y(x,t)=A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\right] \quad \text{Onde harmonique progressive suivant } +x$$

Il existe une autre façon commode d'écrire la fonction d'onde. Pour cela on introduit **le nombre d'onde** défini par :

$$\boxed{k\equiv\frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{nombre d'onde en m}^{-1} \quad (\text{définition})}$$

qui est pour la périodicité spatiale l'équivalent de la pulsation $\omega=2\pi/T$ caractérisant la périodicité temporelle. Ainsi avec $\lambda=2\pi/k$, l'expression importante $\lambda=vT$ peut aussi s'écrire :

$$\omega=v\,k \quad \text{pour une onde périodique}$$

On obtient ainsi la dernière expression importante de la fonction d'onde :

$$y(x,t)=A\cos(kx-\omega t) \quad \text{Onde harmonique progressive suivant } +x$$

Pour une onde harmonique qui se propage suivant les x négatifs, il suffit de changer de signe dans l'argument du cos (paragraphe II), on retiendra donc:

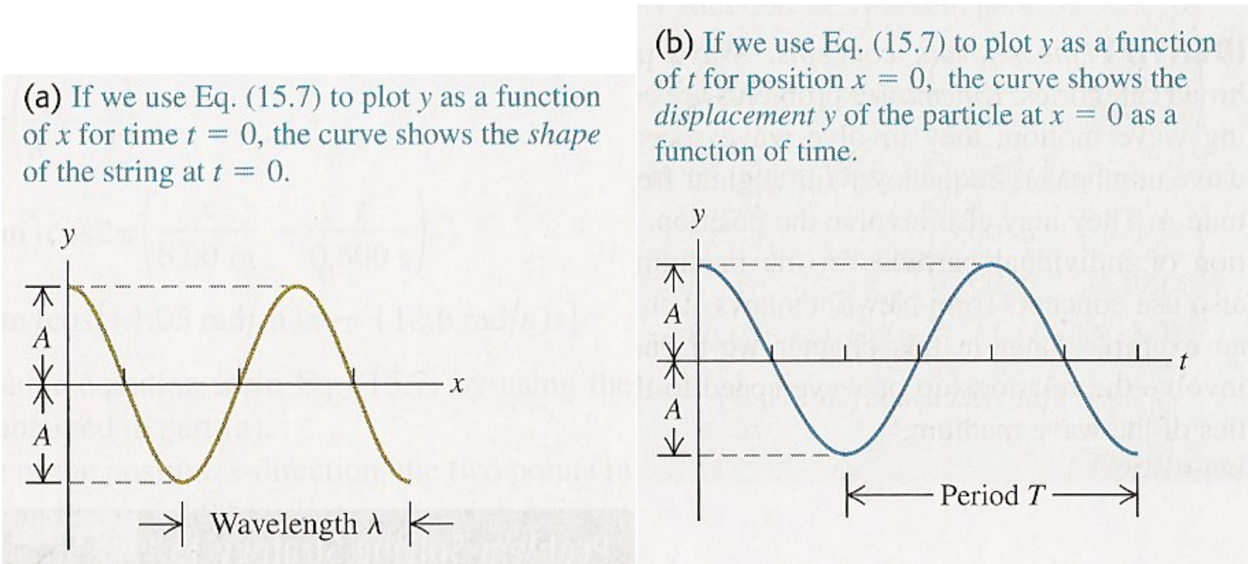
$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{\text{Onde harmonique progressive suivant } +x}\\ y(x,t)=A\cos(\omega t-k\,x)\\ \underline{\text{Onde harmonique progressive suivant } -x}\\ y(x,t)=A\cos(\omega t+k\,x)\end{array}}$$

Dans l'expression $y(x,t) = A\cos(\omega t \pm kx)$, la grandeur $(\omega t \pm kx)$ s'appelle **la phase de l'onde**. Elle joue le rôle d'une grandeur angulaire. L'ensemble des points de l'espace qui à un instant donné ont la même valeur de phase $(\omega t \pm kx)$ s'appelle un **front d'onde**. Pour une onde unidirectionnelle, les fronts d'onde sont les plans perpendiculaires à l'axe x. Vous en reparlerons en optique en PT.

Le tableau ci-dessous récapitule les différentes grandeurs importantes qui caractérisent la **double périodicité temporelle et spatiale** d'une onde progressive harmonique.

Périodicité temporelle	Périodicité spatiale
Période T en s	Longueur d'onde λ en m
Pulsation $\omega = 2\pi/T$ en rad.s^{-1}	Nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$ en m^{-1}
$v = \lambda/T$ $v = \omega/k$	

15.9 Two graphs of the wave function $y(x, t)$ in Eq. (15.7). (a) Graph of displacement y versus coordinate x at time $t = 0$. (b) Graph of displacement y versus time t at coordinate $x = 0$. The vertical scale is exaggerated in both (a) and (b).



La figure 15.9 (a) représente l'allure de la corde $y(x,t=0) = A\cos(k\,x)$ à l'instant $t = 0$, on a fait une photo de la corde à cet instant. Par contre, la courbe 15.9 (b) représente le déplacement d'une particule de la corde au cours du temps située à la position $x = 0$, c'est-à-dire la fonction $y(x=0) = A\cos(\omega t)$.

IV – Ordre de grandeur des fréquences pour divers types d'ondes

4.1 Ondes acoustiques

N'importe quelle source (objet) qui vibre dans un milieu matériel (par exemple un instrument de musique) est la source d'une onde acoustique donc de la production d'un son que notre oreille et notre cerveau sont capables de capter, d'enregistrer. La fréquence du son dépend de la fréquence de vibration de la source. L'oreille humaine est capable de percevoir des sons dont la fréquence est comprise en gros entre 20 Hz et 20 000 Hz. Bien sûr ce domaine varie d'une personne à l'autre et en général devient plus étroit en vieillissant, ainsi les personnes âgées perçoivent peu les fréquences au-delà de 10 000 Hz.

La vitesse de propagation du son dépend des propriétés physiques du milieu dans lequel il se propage (cf. tableau ci-contre).

Par la relation $\lambda = v/f$, la longueur d'onde dépend du milieu dans lequel l'onde se propage.

TABLE 16–1 Speed of Sound in Various Materials (20°C and 1 atm)

Material	Speed (m/s)
Air	343
Air (0°C)	331
Helium	1005
Hydrogen	1300
Water	1440
Sea water	1560
Iron and steel	≈ 5000
Glass	≈ 4500
Aluminum	≈ 5100
Hardwood	≈ 4000
Concrete	≈ 3000

Attention, **la fréquence d'une onde est une grandeur intrinsèque (propre à l'onde) et ne dépend pas du milieu considéré**.

Exercice d'application 2

Quelle est la longueur d'onde dans l'air à 20°C d'une note de fréquence 262 Hz (Do moyen du piano) ?

4.2 Ondes électromagnétiques

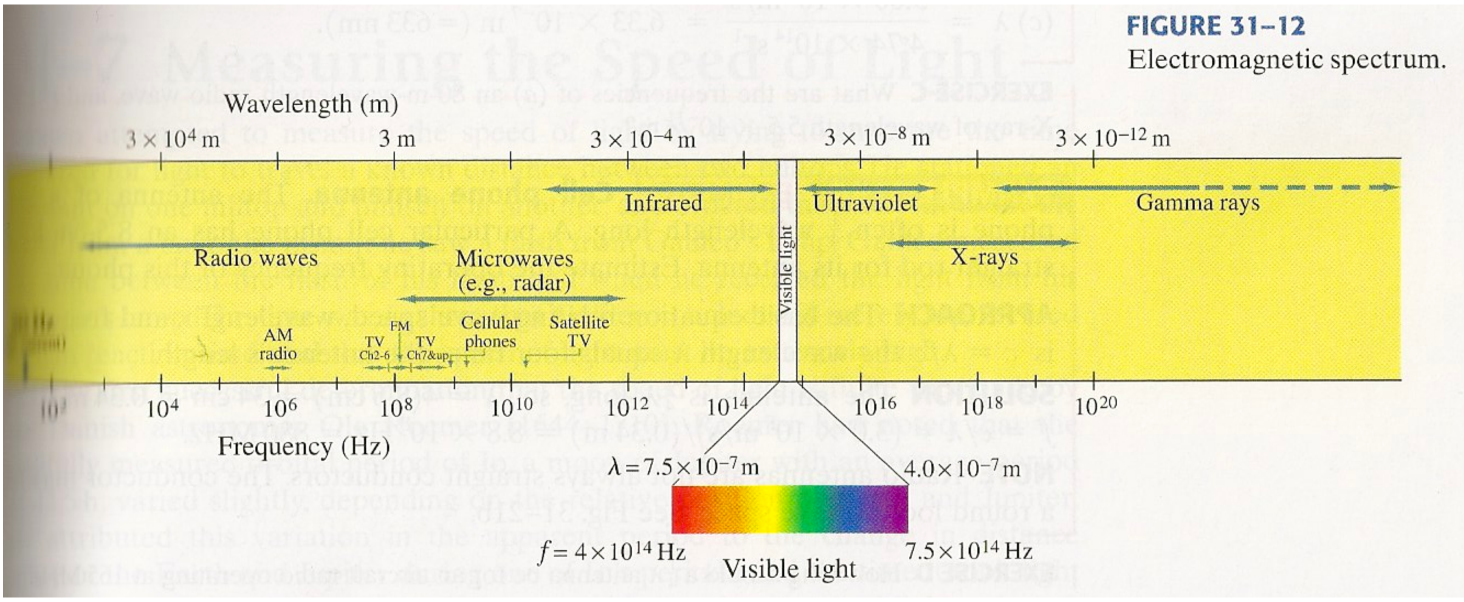


FIGURE 31–12 Electromagnetic spectrum.

Dans le vide, la vitesse de la lumière est une constante et vaut $c = 2{,}99792458 \times 10^{8}$ m.s^{-1} (exactement) pour toutes les fréquences. Dans la matière, la vitesse de propagation de la lumière est telle que $v < c$. On introduit alors **l'indice optique d'un milieu** n par $\boxed{v = \dfrac{c}{n}}$ (sans unité). Comme dans les milieux $v < c$ alors $n > 1$. Nous reparlerons de tout ceci dans le cours d'optique.

La fréquence des ondes électromagnétiques (cf. figure ci-dessus) peut s'étendre de quelques dizaines de Hz (ondes produites par des courants alternatifs) jusqu'à 10^{20} Hz (cas des rayonnements gamma issus d'objets astrophysiques très énergétiques comme les trous noirs). Comme nous le verrons dans le cours d'introduction au monde quantique et en chimie, on peut aussi considérer que la lumière est constituée **de photons** qui se comportent, suivant les circonstances, comme une onde ou comme une particule (ou corpuscule) de masse nulle qui se propage toujours à la vitesse c dans le vide (un photon n'est jamais au « repos »).

L'énergie transportée par un photon de fréquence f est donnée par la relation de Planck-Einstein $E = h\,f$ où $h = 6{,}22 \times 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck. Ainsi plus la fréquence d'une onde électromagnétique est importante, plus l'énergie qu'elle transporte est importante.

Comme nous l'avons déjà signalé, **la fréquence d'une onde est une grandeur intrinsèque** (propre à l'onde) et ne dépend pas du milieu de propagation considéré mais uniquement de la fréquence à laquelle « vibre » la source qui produit cette onde. Par contre, la longueur d'onde dépend du milieu dans lequel se propage l'onde par la relation $v = \lambda/T$. On a ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \text{Dans le vide: } \lambda_0 = cT \\ \rightarrow \text{Dans un milieu d'indice } n : \lambda_n = vT = \dfrac{c}{n}T \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}$$

Ainsi comme $n > 1$, la longueur d'onde diminue dans la matière, la fréquence (ou période) restant la même (cf. figure 20.24)

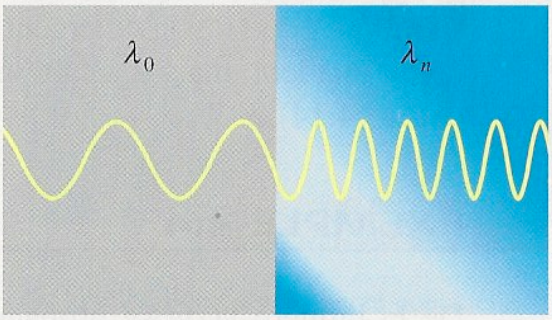


Figure 4.13 ▲
La longueur d'onde de la lumière dans un milieu d'indice n est inférieure à sa longueur d'onde dans le vide : $\lambda_n = \lambda_0/n$. La fréquence de la lumière ne change pas au passage d'un milieu à un autre, car elle est déterminée par la source.

L'œil n'est capable de voir qu'une infime partie du spectre des ondes électromagnétiques (que l'on appelle justement lumière) compris approximativement entre 400 nm pour le violet/bleu et $750-800$ nm pour le rouge/ infrarouge. Dans le vide cela correspond à des fréquences comprises entre 4×10^{14} Hz et $7{,}5\times10^{14}$ Hz. Ces valeurs sont infiniment plus importantes que les fréquences sonores audibles pour l'oreille humaine (cf. exercice d'application 3).

V – Vitesse et accélération des particules dans une onde

Les résultats que nous allons obtenir dans ce paragraphe ne sont pas à connaître dans le cadre du programme de PTSI. Ils le seront en PT. Mais l'équation d'onde que nous allons établir est tellement importante que nous allons commencer à en parler.

Nous allons reprendre l'exemple de la propagation d'ondes transversales sur une corde (suivant les x positifs).

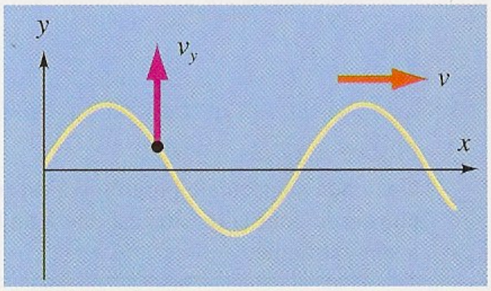


Figure 2.16 ▲
La vitesse d'une particule sur une corde, donnée par $\partial y/\partial t$, est perpendiculaire à la vitesse de propagation de l'onde v.

A un instant donné et à une position donnée, la position transverse d'une « particule » sur la corde est donnée par la fonction d'onde $y(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$. La dérivée par rapport au temps de $y(x,t)$ donne la vitesse transversale d'une particule de la corde notée $v_y(x,t)$ (cf. figure 2.16). Attention, il ne faut pas confondre cette vitesse avec la vitesse v de propagation de l'onde sur la corde (encore cf. figure 2.16). On a donc :

$$v_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A\sin(kx-\omega t)$$

Si l'on dérive deux fois $y(x,t)$ par rapport au temps, on obtient cette fois l'accélération d'une particule de la corde :

$$a_y = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx-\omega t)$$

On peut aussi calculer la dérivée première de $y(x,t)$ par rapport à x, ce qui représente la pente de la corde et la dérivée seconde de $y(x,t)$ par rapport à x qui représente alors la courbure de la corde :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx-\omega t) = -k^2 y(x,t)$$

Si l'on se rappelle que $\omega = vk$ on voit que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \Big/ \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \omega^2/k^2 = v^2 \text{ et} \\ \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{Equation d'onde (ou de d'Alembert)} \end{array}}$$

Cette dernière équation, dite **équation d'onde ou équation de d'Alembert** est une équation très importante de la physique. On peut dire qu'elle joue pour les ondes le même rôle que le principe fondamental de la dynamique pour les particules. Ce résultat, obtenu dans le cas particulier de la corde, est tout à fait général. En effet, n'importe quelle fonction d'onde $S(x,t) = f(x-vt)$ où $S(x,t) = g(x+vt)$ vérifie l'équation d'onde. Cette dernière est donc aussi valable pour les ondes acoustiques longitudinales et elle décrit aussi la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, donc aussi de la lumière, comme vous le verrez en détail en classe de PT.

D'un point de vue mathématique, l'équation d'onde est une équation différentielle d'ordre deux et linéaire. Le fait que cette équation soit linéaire joue un rôle important dans le principe de superposition comme nous le verrons dans le prochain chapitre.