Cours 11 – Méthode numérique d'Euler d'ordre 1

A / Qu'est-ce qu'une équation différentielle d'ordre 1 et quelle est sa solution ?

Une équation différentielle d'ordre 1 est une équation qui relie une fonction inconnue à sa dérivée première que l'on peut écrire de façon générale sous la forme suivante :

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$$

Ici t (souvent le temps en science) est **la variable indépendante** et $y(t)$ **la variable dépendante** (du temps ici). Vous avez déjà rencontré évidemment des exemples d'équations différentielles d'ordre 1 dans vos cours.

Exemples :

✓ Chute libre d'une masse avec frottement fluide :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad \Rightarrow \quad f(v) = g - \frac{k}{m}v^2 \quad (1)$$

✓ Condensateur soumis à une tension alternative :

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E\sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad f(t,u_c) = \frac{E}{RC}\sin(\omega t) - \frac{1}{RC}u_c \quad (2)$$

✓ La fameuse équation logistique, modèle d'évolution d'une population S :

$$\frac{dS}{dt} = \beta S\left(1 - \frac{S}{M}\right) \quad \Rightarrow \quad f(S) = \beta S\left(1 - \frac{S}{M}\right) \quad (3)$$

Nous allons très souvent rencontrer des équations différentielles de la forme $dy/dt = f(y)$ dans laquelle f ne dépend plus explicitement du temps, on parle dans ce cas d'équation **autonome**. (1) et (3) sont des équations autonomes. (2) est une équation **non autonome**.

Lorsque l'on rencontre une équation différentielle en pratique, elle est souvent liée à des **conditions initiales**. On cherche une solution qui prend une valeur donnée à un instant particulier. On écrit alors une équation différentielle avec une condition initiale sous la forme (on admet ici l'existence d'une solution unique à ce problème):

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_{init}$$

Une équation différentielle d'ordre un est **linéaire** si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t)$$

En classe préparatoire, nous rencontrerons la plupart du temps des équations linéaires car de nombreux modèles ou lois physiques importants sont linéaires. De plus, elles sont plus simples à résoudre **analytiquement** (grâce au principe de superposition), c'est à dire trouver une solution $y(t)$ qui s'exprime à partir des fonctions mathématiques transcendantales habituelles. Les équations (1) et (2) sont linéaires.

Cependant les équations linéaires ne sont qu'une infime partie des équations possibles et de nombreux modèles dynamiques (en physique, chimie, sciences de l'ingénieur, biologie, économie …) font appel à **des équations non linéaires**, comme l'équation logistique (3). Il est très difficile, voire impossible, de trouver des solutions analytiques aux équations non linéaires. Mais rien n'est perdu car il existe de nombreuses **méthodes mathématiques quantitatives et numériques** qui permettent d'appréhender les solutions des équations différentielles sans avoir leurs expressions analytiques !

B/ Approximation de la solution par la méthode d'EULER explicite

Pour décrire la méthode d'Euler (Leonhard Euler, mathématicien et physicien suisse, 1701-1783, qui a passé l'essentiel de sa vie à Saint-Pétersbourg et à Berlin), on part du problème suivant :

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad y(t_0) = y_{init}$$

On ne connaît pas la fonction $y(t)$ évidemment mais on connaît sa pente à chaque instant t qui est donné par $f(t,y)$!

On va donc approximer la solution par une succession de pentes droites entre deux instants « proches » δt.

On, notera y_k la valeur approchée de y à l'instant t_k. L'idée clé est de remplacer **la dérivée à droite** (cf. cours d'informatique sur la dérivation) par un taux d'accroissement fini, on pourra écrire :

$$\frac{dy}{dt}(t_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k} = f(t_k, y_k)$$

Comme $t_{k+1} = t_k + \delta t$, on peut déterminer y_{k+1} à partir de y_k en écrivant :

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\delta t$$

Ainsi à partir de la connaissance de $(t_0, y_0 = y_{init})$, on peut déterminer successivement (t_1, y_1), (t_2, y_2) etc… par la procédure suivante :

départ

$(t_0, y_0 = y_{init})$ conditions intiales

$\Downarrow$

Etape 1

(t_1, y_1) avec $t_1 = t_0 + \delta t$ et $y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\delta t$

$\Downarrow$

Etape 2

(t_2, y_2) avec $t_2 = t_1 + \delta t$ et $y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)\delta t$

$\Downarrow$

…

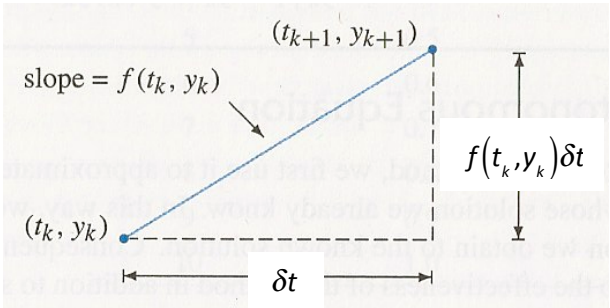


Figure 1.33
Euler's method uses the slope at the point (t_k, y_k) to approximate the solution for $t_k \le t \le t_{k+1}$.

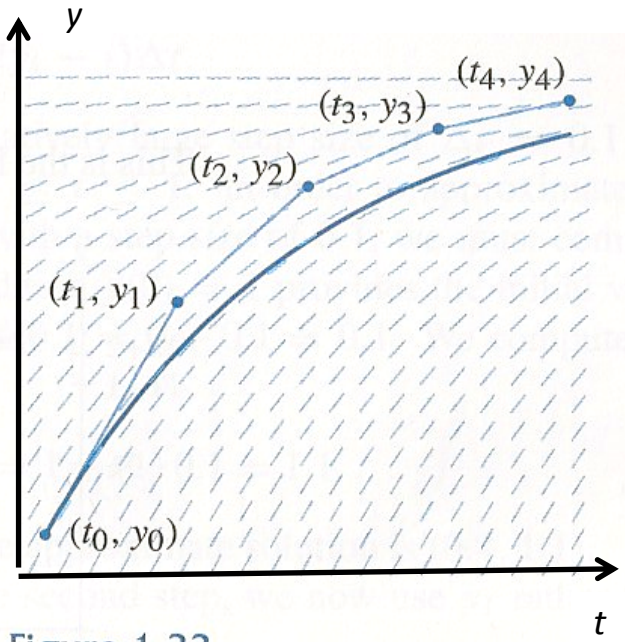


Figure 1.32
The graph of a solution and its approximation obtained using Euler's method.

On peut résumer la méthode d'Euler par l'encart suivant :

Méthode d'Euler pour $\frac{dy}{dt}=f\left(t,y\right),\quad y\left(t_0\right)=y_{\text{init}}$

A partir de la condition initiale $y\left(t_0\right)=y_{\text{init}}$ et du pas δt, calculer le point $\left(t_{k+1},y_{k+1}\right)$ à partir du point précédent $\left(t_k,y_k\right)$ en suivant la procédure suivante :

1) Utiliser l'équation différentielle pour calculer la pente $f\left(t_k,y_k\right)$

2) Calculer le point suivant $\left(t_{k+1},y_{k+1}\right)$ en utilisant les relations :

$$t_{k+1}=t_k+\delta t \quad \text{et} \quad y_{k+1}=y_k+f\left(t_k,y_k\right)\delta t$$

Il s'agit ici de la méthode d'Euler dite **EXPLICITE (dérivée estimée à droite)**.

C/ Limitations des méthodes numériques

L'approche numérique pour la résolution des équations différentielles est toujours possible et est très efficace, elle est donc très utilisée en science et en ingénierie. Il est donc tentant de toujours « laisser faire l'ordinateur ». Il n'y a rien de « faux » à cela tant que l'on garde à l'esprit les deux points importants suivants :

1) Un ordinateur donne des nombres et fournit des courbes, il n'interprète pas physiquement les résultats. Comprendre qualitativement le comportement d'une solution approchée et ses implications pour le système physique étudié est toujours l'œuvre d'un humain !

2) Les méthodes numériques, comme la méthode d'Euler, donne une **solution approchée** de l'équation différentielle ! A chaque étape de la méthode les erreurs s'accumulent. On peut réduire l'accumulation des erreurs en réduisant le pas δt mais cela est plus gourmand en temps et en puissance de calcul. Pour de nombreuses équations différentielles, l'accumulation des erreurs reste insignifiante mais il existe des systèmes « chaotiques » pour lesquels les faibles erreurs vont s'amplifier très rapidement.

La bibiliothèque `numpy` de Python possède une fonction `odeint` de résolution numérique des équations dfifférentielles que nous aurons l'occasion d'utiliser. `odeint` est bien évidemment plus sophistiquée que la méthode d'Euler. Elle repose sur la méthode très populaire de **Runge-Kunta**, qui est très performante en terme de rapport précision/temps de calculs. La méthode d'Euler, qui est la méthode la plus simple pour résoudre numériquement des équations différentielles, est commode mais elle est gourmande en temps de calcul, peut manquer de précision et ainsi conduire à des résultats erronés. Il faut donc être vigilant !

D/ Mise en œuvre de la méthode d'Euler avec Python

D.1 / Cas d'une équation différentielle autonome : exemple de la chute libre

On va prendre comme exemple l'équation différentielle de l'exemple (1):

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2 \quad \Rightarrow \quad f\left(v\right)=g-\frac{k}{m}v^2 \quad (1)$$

Cette équation modélise l'évolution de la vitesse d'un parachutiste en chute libre, ici les frottements sont proportionnels à la vitesse au carré, l'équation est non linéaire. Cette équation possède une solution analytique, on peut la résoudre par séparation des variables comme nous le verrons dans le cours de cinétique chimique où nous rencontrerons une équation différentielle du même type.

On prendra les valeurs numériques suivantes : $g=9{,}81\ \text{m.s}^{-1}$, $m=54\ \text{kg}$, $k=0{,}18\ \text{kg.m}^{-1}$ et $v\left(0\right)=0\ \text{m.s}^{-1}$.

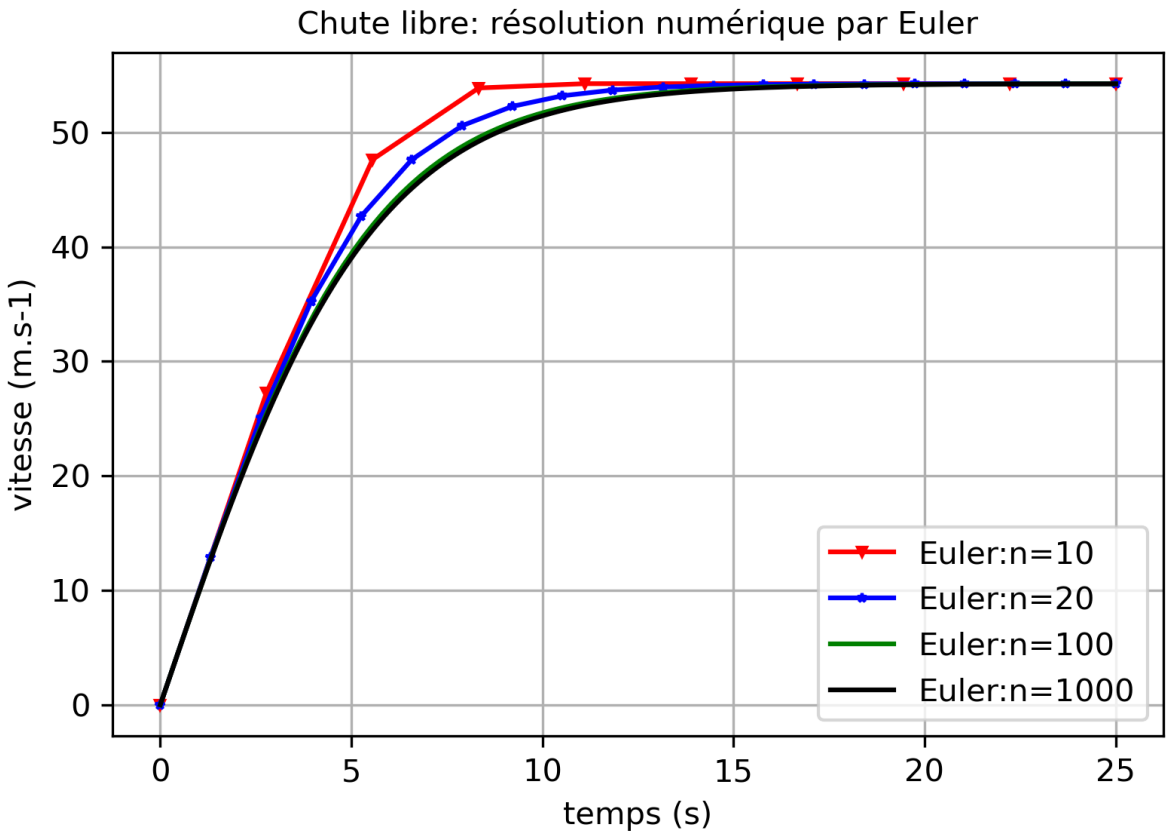
Sans résoudre explicitement l'équation différentielle, on peut déterminer la valeur asymptotique de la vitesse que l'on appelle la vitesse limite v_{lim}. Il suffit de noter que, cette vitesse étant une constante :

$$\lim_{t\to\infty} v = v_{lim} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = f(t,v) = 0 \Leftrightarrow v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 54{,}25 \text{ m.s}^{-1}$$

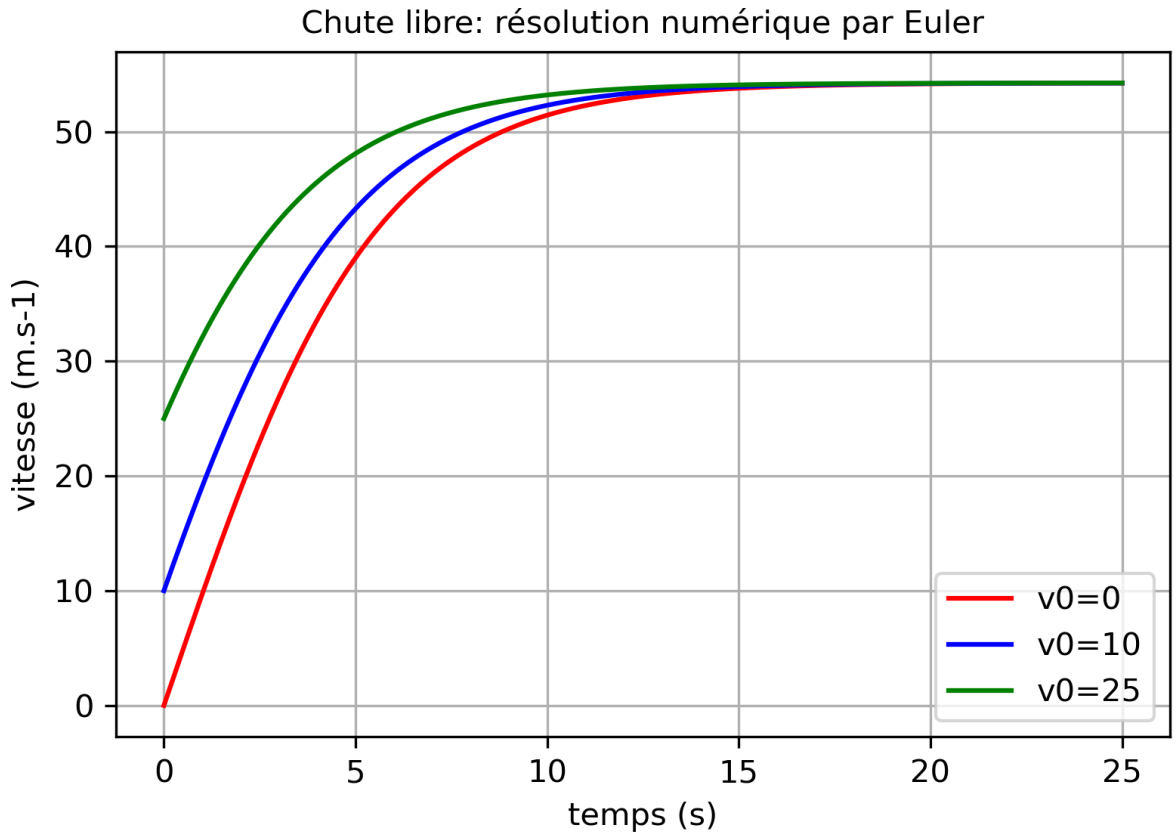
Voici un exemple de code qui fait appel à la méthode d'Euler pour résoudre numériquement l'équation différentielle précédente.

```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#définition de la fonction f(v)=la pente=dv/dt
#ici fonction autonome, ne dépend pas du temps
def f(v):
    g=9.81 #en m.s-1
    m=54 #en kg
    k=0.18 #en kg.m-1
    dv_dt=g-(k/m)*(v**2)
    return dv_dt

#résolution par la méthode d'Euler
#T: durée de l'intervalle de résolution
#n: nombre de points de calcul
#v0: valeur initiale de la vitesse
def euler(T,n,v0):
    dt=T/(n-1)
    temps=np.linspace(0,T,n)
    vitesse=np.zeros(n)
    vitesse[0]=v0 #condition initiale (un point car eq. diff. ordre 1)
    for k in range (n-1):
        #il reste n-2 points à calculer, on connait le premier, on ne peut pas
        #calculer le dernier
        vitesse[k+1]=vitesse[k]+dt*f(vitesse[k])
        print(k)
    return vitesse, temps

#appel de la fonction euler
vitesse_1, temps_1 = euler(25,10,0)
vitesse_2, temps_2 = euler(25,20,0)
vitesse_3, temps_3 = euler(25,100,0)
vitesse_4, temps_4 = euler(25,1000,0)

#tracé des graphes
plt.plot(temps_1,vitesse_1,'r-v', markersize=3)
plt.plot(temps_2,vitesse_2,'b-*', markersize=3)
plt.plot(temps_3,vitesse_3,'g-', markersize=3)
plt.plot(temps_4,vitesse_4,'k-', markersize=3)
plt.title('Chute libre: résolution numérique par Euler',size=10)
plt.xlabel('temps (s)',size=10)
plt.ylabel('vitesse (m.s-1)',size=10)
plt.legend(['Euler:n=10','Euler:n=20','Euler:n=100','Euler:n=1000'],fontsize=10)
plt.grid()
plt.savefig("chute-libre.png",dpi=300)
plt.show()
```

On constate, sur la courbe suivante, qu'avec seulement 10 points de calcul, la méthode n'est pas très précise, on distingue clairement l'approximation par les tangentes. Cependant, dans notre cas, la méthode converge très vite vers une solution stable. A partir de 100 points de calculs, il est difficile de voir la différence entre les courbes.



On remarquera aussi que quelles que soient les conditions initiales, les courbes tendent toutes vers la même vitesse limite v_{lim} qui est une solution attractive pour toutes les conditions initiales.



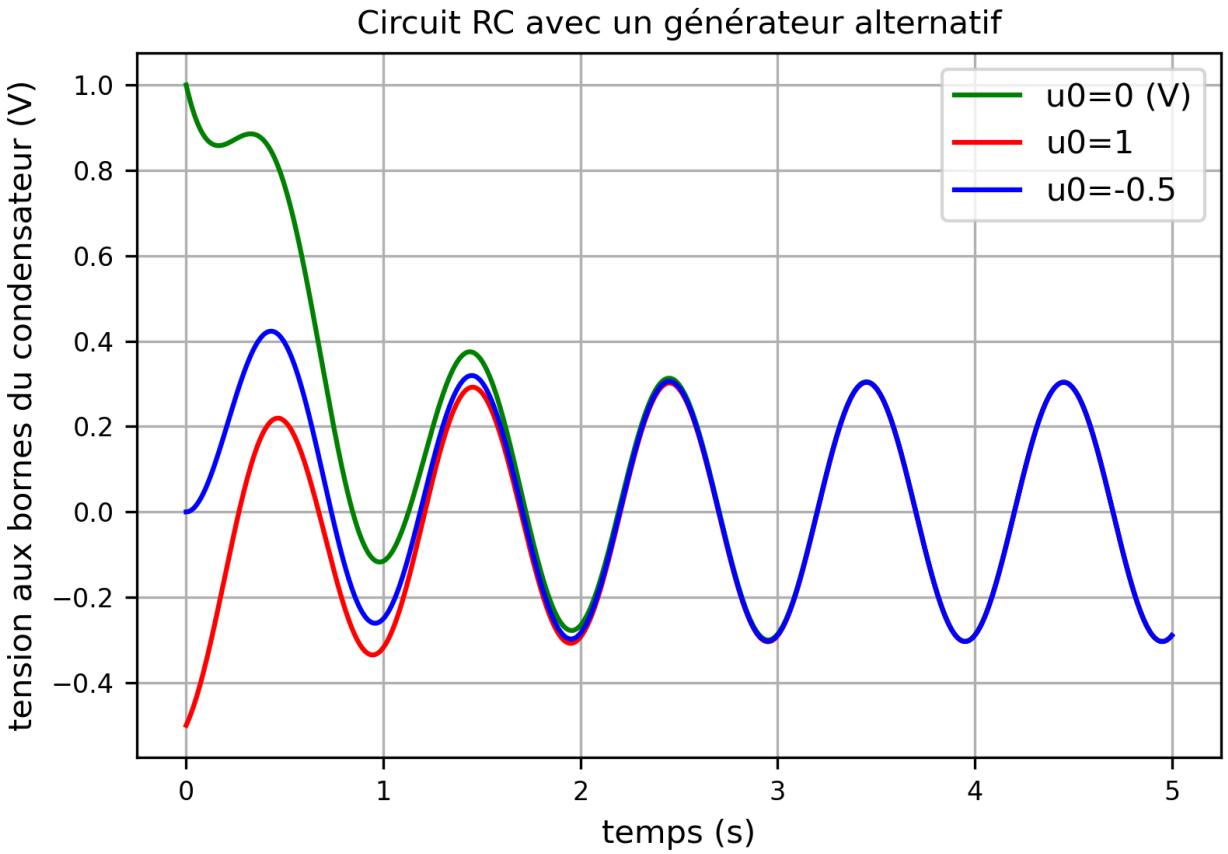
D.2 / Cas d'une équation différentielle non autonome : exemple d'un circuit RC soumis à une tension alternative

On part de l'équation différentielle (2) avec pour valeur numérique: $E=3\ V$, $RC=1/2$ s et $\omega=2\pi$ s^{-1}. Cela donne alors :

$$\frac{du_c}{dt}=-2u_c+3\sin\left(2\pi t\right) \ \Rightarrow \ f\left(t,u_c\right)=-2u_c+3\sin\left(2\pi t\right)$$

u_c représente la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RC avec un générateur de tension alternative. Nous verrons comment résoudre analytiquement cette équation différentielle dans le cours de physique.

Vous ferez la résolution numérique de cette équation en TP. Voici les résultats obtenus avec différentes valeurs initiales pour la tension aux bornes du condensateur.



On remarquera, encore une fois, que quelles que soient les conditions initiales, les courbes tendent toutes vers la même solution harmonique. Nous en reparlerons dans le cours de physique.