

## TD 11 – Méthode numérique d'Euler d'ordre 1

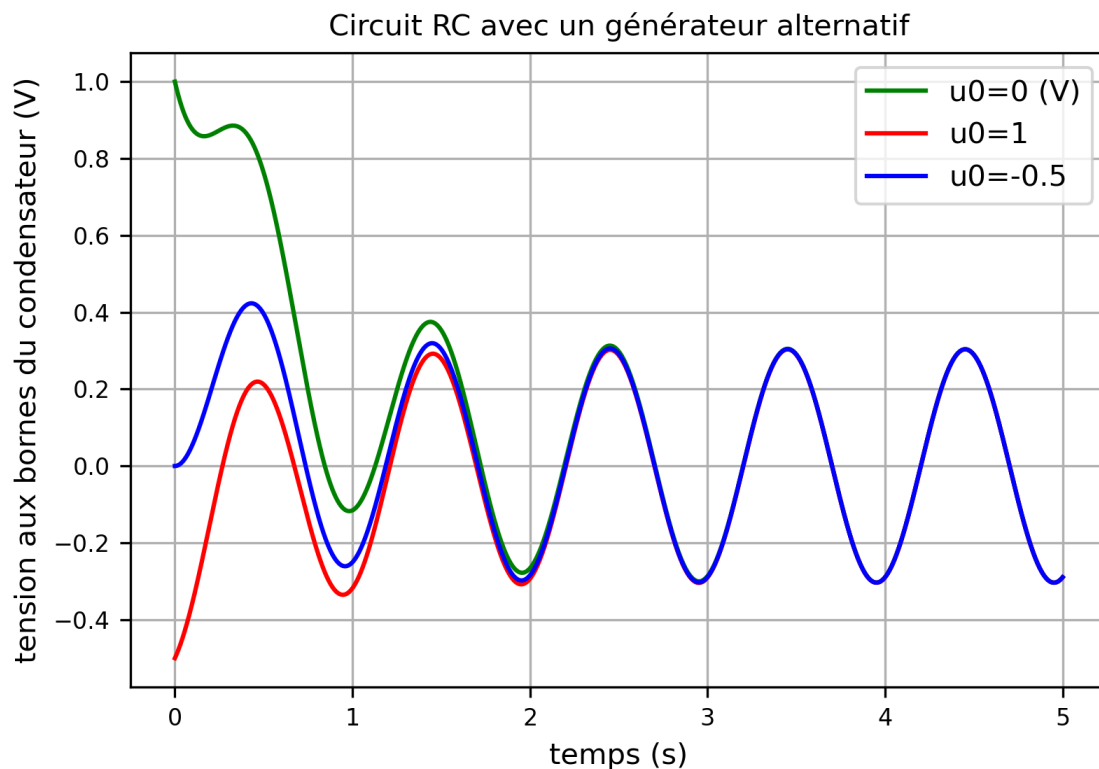
### A / Equation différentielle non autonome : exemple d'un circuit RC soumis à une tension alternative

On part de l'équation différentielle vue en cours:

$$\frac{du_c}{dt} = -2u_c + 3\sin(2\pi t) \Rightarrow f(t, u_c) = -2u_c + 3\sin(2\pi t)$$

$u_c$  représente la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RC avec un générateur de tension alternative. Cette équation est **non autonome** car  $f(t, u_c)$  dépend explicitement du temps.

🔧 En vous inspirant du code présenté dans le cours, résoudre cette équation différentielle par la méthode d'Euler (explicite). Vous tracerez sur un même graphe les solutions approchées pour différentes valeurs initiales de la tension, par exemple  $u_c(t=0) = 0$  V; 1 V et -0,5 V. Vous devez obtenir les courbes suivantes :



N'hésitez pas à modifier le nombre de pas de calcul pour tester la précision et le temps de calcul associés à la méthode d'Euler.

### B / Equation différentielle autonome : exemple de l'équation logistique

La fameuse équation logistique est un premier modèle pour représenter l'évolution d'une population  $S(t)$  dans le temps :

$$\frac{dS}{dt} = \beta S \left( 1 - \frac{S}{M} \right) \Rightarrow f(S) = \beta S \left( 1 - \frac{S}{M} \right)$$

Cette équation est **autonome** car  $f(S)$  ne dépend pas explicitement du temps. Elle est aussi non linéaire ; si on développe, il y a un terme en  $S^2$ .

- $S(t) > 0$  représente la valeur de la population d'une espèce donnée à un instant  $t$ .
- $k$  est le coefficient de croissance de la population.
- $M$  est la population maximale que peut supporter l'environnement.

On constate que :

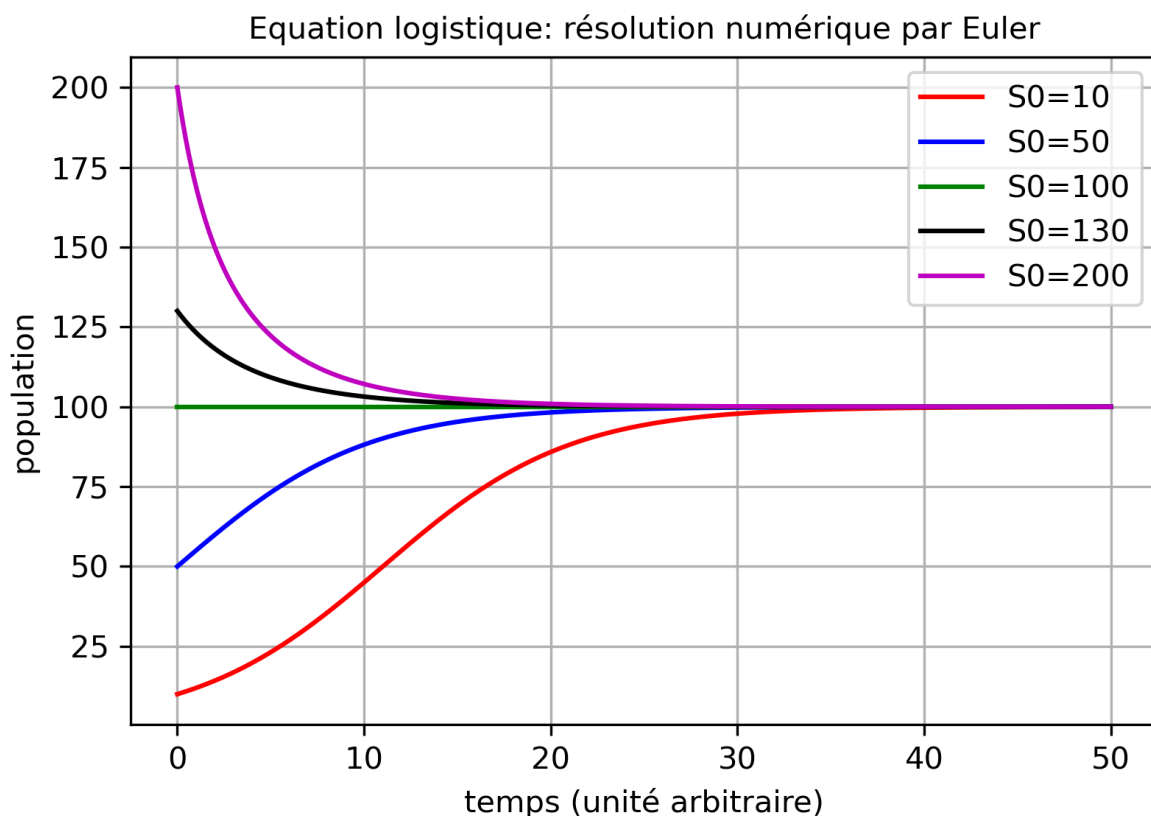
- $S \ll M$ ,  $\frac{dS}{dt} \approx \beta S$ , la population va croître exponentiellement.
- $S > M$ ,  $\frac{dS}{dt} < 0$ , la population va décroître, on dépasse la population maximale que peut supporter les ressources de l'environnement.

On remarque aussi qu'il y a deux solutions stables évidentes :  $S=0$  et  $S=M$ . Pour ces deux cas,  $\frac{dS}{dt} = 0$ . La population n'évolue plus. Pour  $S=0$ , il y a extinction de la population et pour  $S=M$  la population a atteint sa valeur maximale.

**Q1** – 📄 En vous inspirant du code présenté dans le cours, résoudre cette équation différentielle par la méthode d'Euler (explicite). On prendra  $\beta=0.2$  (inverse d'un temps) et  $M=100$ . Vous tracerez sur un même graphe les solutions approchées pour différentes valeurs initiales de la population. Vous pouvez évidemment changer la valeur des paramètres  $\beta$  et  $M$  et analyser ce qu'il se passe.

N'hésitez pas encore une fois à modifier le nombre de pas de calcul pour tester la précision et le temps de calcul associés à la méthode d'Euler.

Vous devez obtenir les courbes suivantes :



**Q2** – On considère de nouveau l'équation logistique précédente mais cette fois on rajoute un terme qui correspond à un terme de récolte périodique de la population, c'est le cas de la pêche périodique d'une population de poisson par exemple.

$$\frac{dS}{dt} = \beta S \left(1 - \frac{S}{M}\right) - a (1 + \sin(b t))$$

On prendra pour toute cette partie  $b = 1$ .

a)  Vous testerez votre modèle avec le jeu de variable du tableau ci-dessous en prenant  $a = a_1$ .  
Que se passe-t-il pour la population de poisson suivant les différents choix des paramètres ?

b)  Reprenez la question précédente mais cette fois avec  $a = a_2$ .  
Que se passe-t-il pour la population de poisson suivant les différents choix des paramètres ?

| Choix | $\beta$ | $M$ | $a_1$ | $a_2$ |
|-------|---------|-----|-------|-------|
| 1     | 0.25    | 4   | 0.16  | 0.25  |
| 2     | 0.50    | 2   | 0.21  | 0.25  |
| 3     | 0.20    | 5   | 0.21  | 0.25  |
| 4     | 0.20    | 5   | 0.16  | 0.25  |
| 5     | 0.25    | 4   | 0.09  | 0.25  |
| 6     | 0.20    | 5   | 0.09  | 0.25  |
| 7     | 0.50    | 2   | 0.16  | 0.25  |
| 8     | 0.20    | 5   | 0.24  | 0.25  |
| 9     | 0.25    | 4   | 0.21  | 0.25  |
| 10    | 0.50    | 2   | 0.09  | 0.25  |