TD 12 – Méthode numérique d'Euler d'ordre 2

Note: Les questions des exercices ne constituent que la trame principale de ce que vous devez faire pour vous guider, rien n'interdit bien sûr que vous alliez plus loin, que vous testiez d'autres choses, bref que vous expérimentiez…

A / Modèle de propagation de la grippe

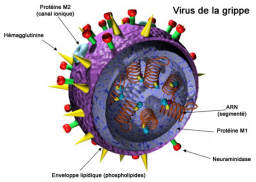
Les modèles mathématiques sont très utilisés pour comprendre la propagation des maladies infectieuses (surtout hélas en cette période). Nous allons considérer le cas simple d'une population constante constituée de deux groupes : la population $S(t)$ **susceptible d'être contaminée et la population infectée** $I(t)$ qui porte la maladie et qui est capable de la transmettre.
Un modèle biologique donne le système d'équations différentielles qui gouverne ces populations :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -r\,S\,I \\ \dfrac{dI}{dt} = r\,S\,I - a\,I \end{cases}$$

où r et a sont des paramètres constants liés à l'épidémie. Pour résoudre ce système nous devons connaître les deux conditions initiales suivantes : $S(0) = S_{\text{init}}$ et $I(0) = I_{\text{init}}$. Nous souhaitons calculer la solution pour $t = 0$ à $t = T$ avec $T > 0$.
On note comme dans le cours (I_k, S_k) les solutions approchées correspondant aux solutions exactes $\left(I(t_k), S(t_k)\right)$.
On approxime une fois de plus la dérivée par un taux d'accroissement fini, ce qui donne (montrez-le) :

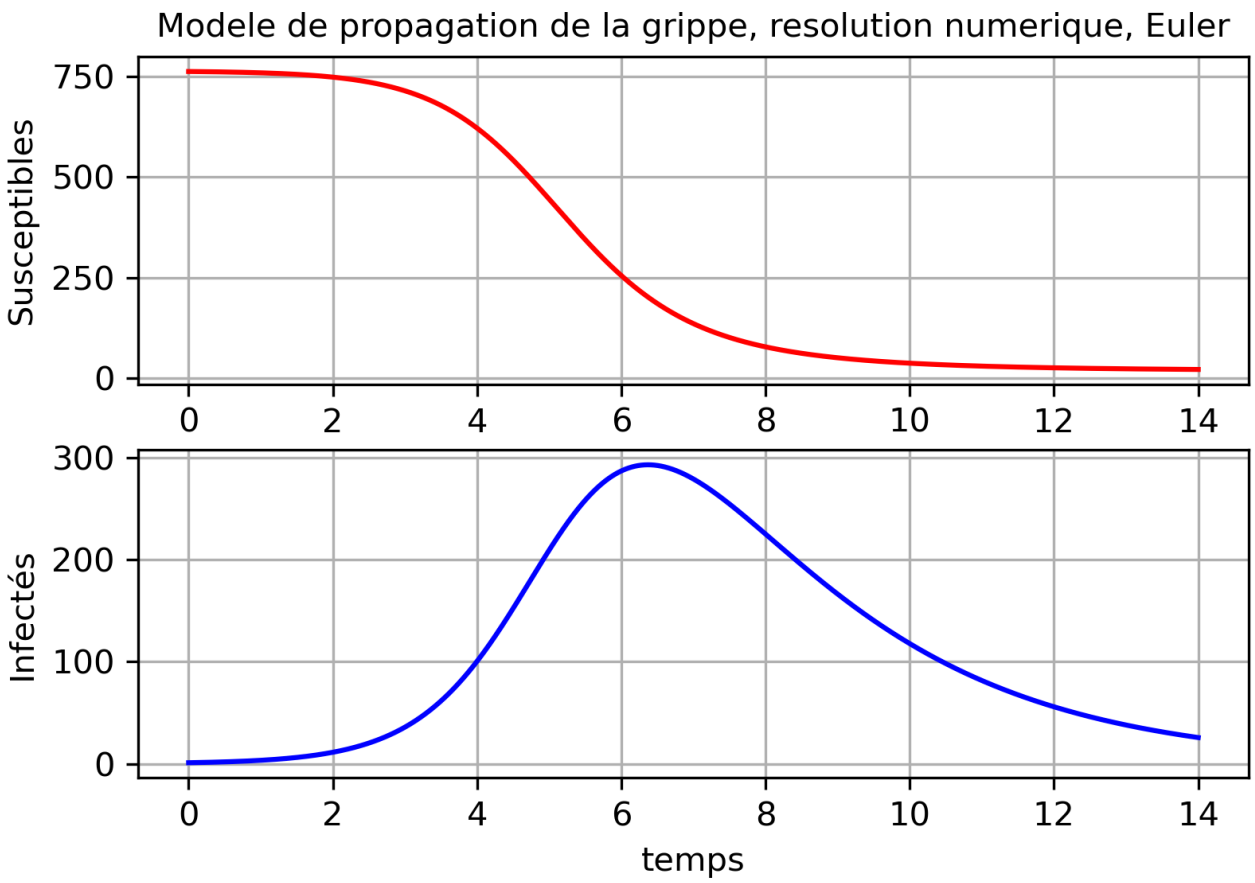
Méthode d'Euler

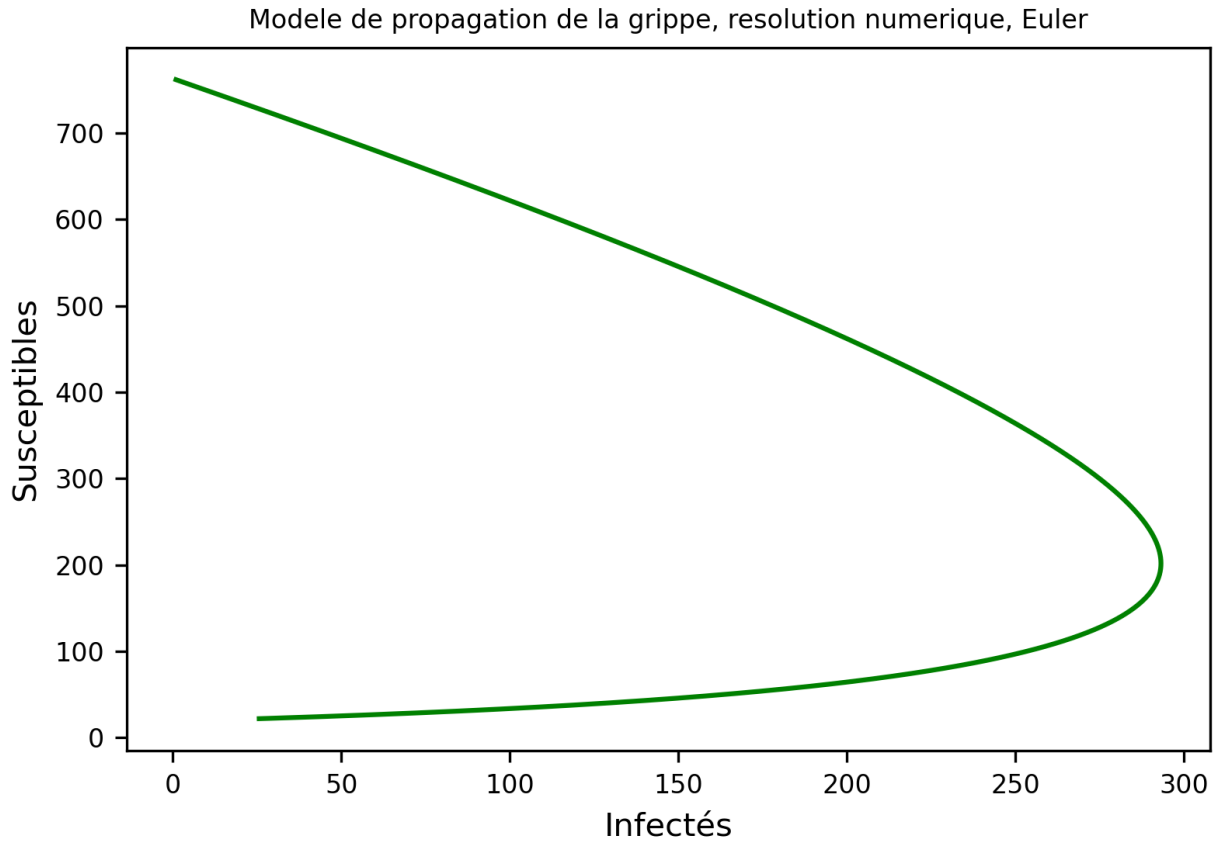
$$t_{k+1} = t_k + \delta t$$
$$\begin{cases} S_{k+1} = S_k - (r\,S_k\,I_k)\,\delta t \\ I_{k+1} = I_k + (r\,S_k\,I_k - a\,I_k)\,\delta t \end{cases}$$



En vous inspirant du code présenté dans le cours, résoudre ce système d'équations différentielles par la méthode d'Euler. Vous appliquerez votre code au cas concret suivant. En 1978, une épidémie de grippe a touché une école britannique de 763 garçons. L'épidémie a débuté le 21 janvier et s'est terminée le 4 février. Vous prendrez donc $T = 14$, $S_0 = 762$, $I_0 = 1$, $r = 2{,}18 \times 10^{-3}$, $a = 0{,}44$ et $n = 1000$ (données par Murray *et al*, British Medical Journal, 4 mars 1978).
Tracez **les courbes** $S(t)$ et $I(t)$ ainsi que le **portrait de phase.** Analysez et concluez. Vous pouvez essayer de voir ce qu'il se passe si vous modifiez les paramètres r et a.

Vous devez obtenir les courbes suivantes :



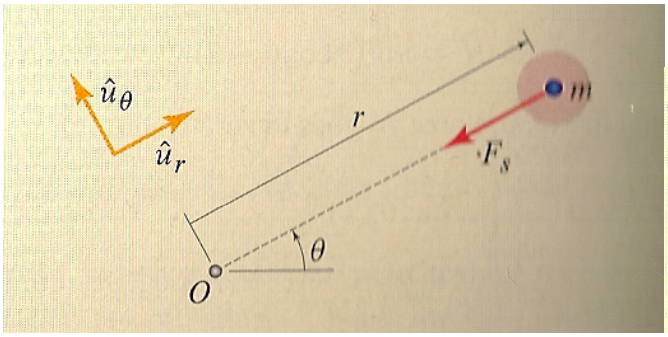


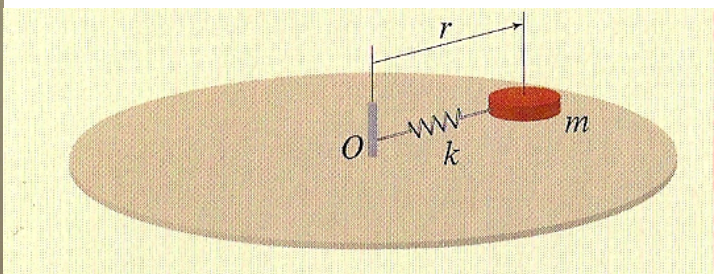
B / Masse attachée à un ressort et libre de tourner

On considère une masse m attachée à un ressort. L'autre extrémité du ressort est liée à une tige libre de tourner. La masse est libre de se mouvoir sans frottement sur le plan horizontal. Le ressort a une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0.

Comme vous l'avez vu en exercice dans le cours de physique, par application de la seconde loi de Newton, dans le système de coordonnées polaires, la masse est régie par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + \dfrac{k}{m}\left(r-\ell_0\right) = 0 \\ r\dfrac{d^2\theta}{d\theta^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} = 0 \end{cases}$$





Ce système de 2 équations différentielles d'ordre 2 peut se mettre sous la forme d'un système de 4 équations différentielles d'ordre 1 suivant avec les fonctions inconnues $r(t)$, $v(t)$, $\theta(t)$ et $\omega(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \\ \dfrac{dv}{dt} = r\omega^2 - \left(\dfrac{k}{m}\right)\left(r-\ell_0\right) \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{2}{r}v\,\omega \end{cases}$$

En remplaçant les dérivées par un taux d'accroissement fini, la méthode d'Euler donne :

Méthode d'Euler

$$t_{k+1} = t_k + \delta t$$

$$\begin{cases} r_{k+1} = r_k + v_k\delta t \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k\delta t \\ v_{k+1} = v_k + \left(r_k\omega_k^2 - \dfrac{k}{m}\left(r_k-\ell_0\right)\right)\delta t \\ \omega_{k+1} = \omega_k - \left(\dfrac{2}{r_k}v_k\,\omega_k\right)\delta t \end{cases}$$

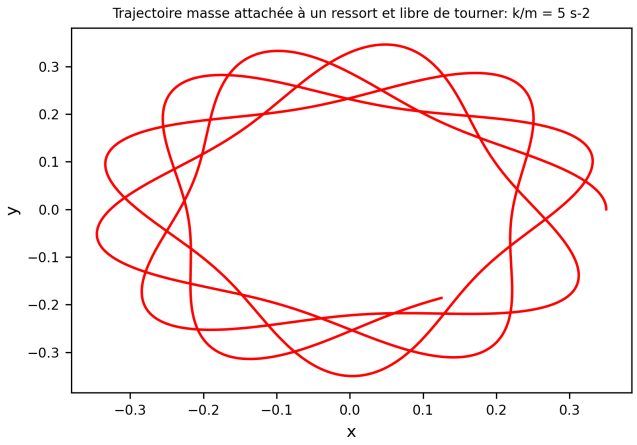
On part des conditions initiales suivantes :

$r_{init} = 0{,}35$ m, $\theta_{init} = 0$ rad, $v_{init} = 0$ m.s^{-1}, $\omega_{init} = 0{,}5$ rad.s^{-1} et $\ell_0 = 0{,}25$ m.

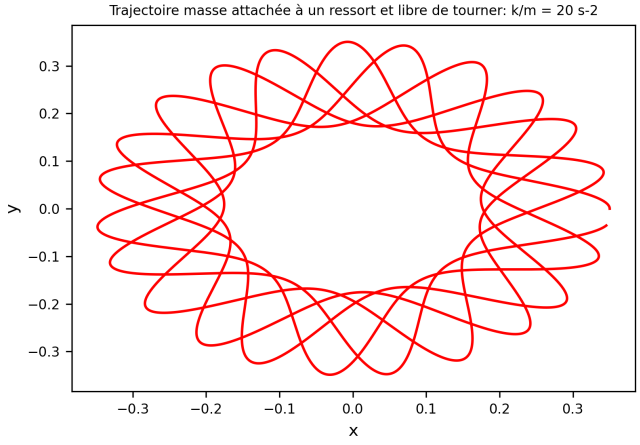
⌨ En vous inspirant du code présenté dans le cours, résoudre ce système d'équations différentielles par la méthode d'Euler. Tracez la trajectoire de la masse pour les quatre conditions suivantes : $k/m = 5\,;20\,;100\,;500\ \text{s}^{-2}$
Chaque plot sera tracé pour $0 \le t \le 10\ \text{s}$.
Note : Pour tracer $x(t)$ et $y(t)$, il suffit de noter que $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$ et $y(t) = r(t)\sin\theta(t)$
Attention : δt doit être très petit ici pour que la méthode d'Euler puisse donner des résultats (trajectoires) corrects.

Vous devez obtenir les courbes suivantes

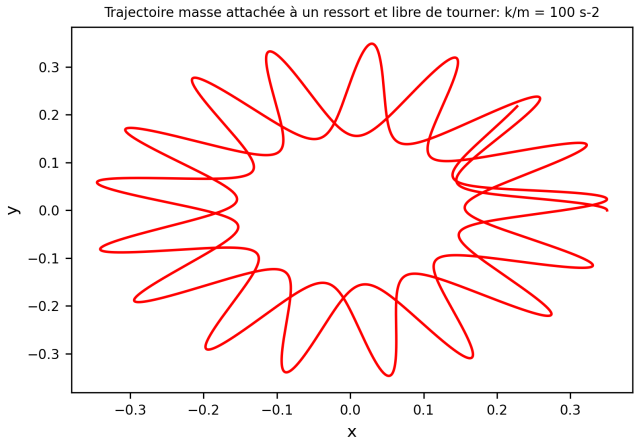
Premier cas : $k/m = 5\ \text{s}^{-2}$



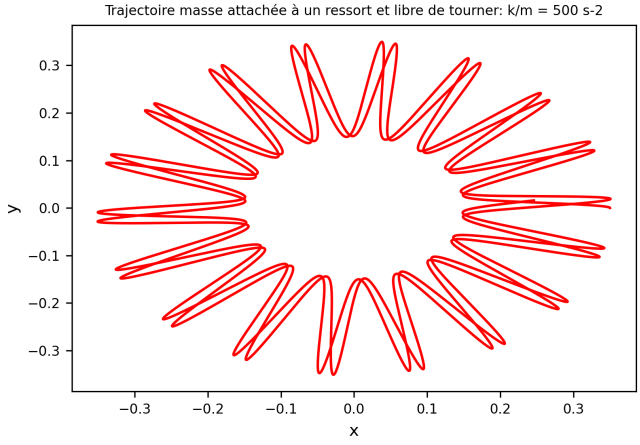
Deuxième cas : $k/m = 20\ \text{s}^{-2}$



Troisième cas : $k/m = 100\ \text{s}^{-2}$



Quatrième cas : $k/m = 500\ \text{s}^{-2}$



C / Le système de Lorenz

(Source Wikipédia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Système_dynamique_de_Lorenz)
« Bien que le caractère vraisemblablement chaotique de la météorologie fut pressenti par Henri Poincaré, le météorologue Edward Lorenz est considéré comme étant le premier à le mettre en évidence, en 1963.
Mathématiquement, le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. Ce système d'équations était beaucoup trop compliqué à résoudre numériquement pour les premiers ordinateurs existant au temps de Lorenz. Celui-ci eut donc l'idée de chercher un modèle très simplifié de ces équations pour étudier une situation physique particulière : le phénomène de convection de Rayleigh-Bénard. Il aboutit alors à un système dynamique différentiel possédant seulement *trois* degrés de liberté, beaucoup plus simple à intégrer numériquement que les équations de départ. »

On considère donc le modèle suivant de trois équations différentielles d'ordre 1 d'inconnues $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho\,x - y - x\,z$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta\,z + x\,y$$

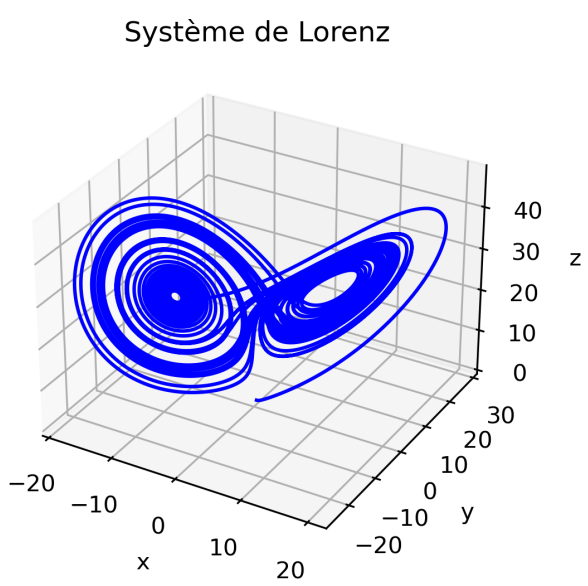
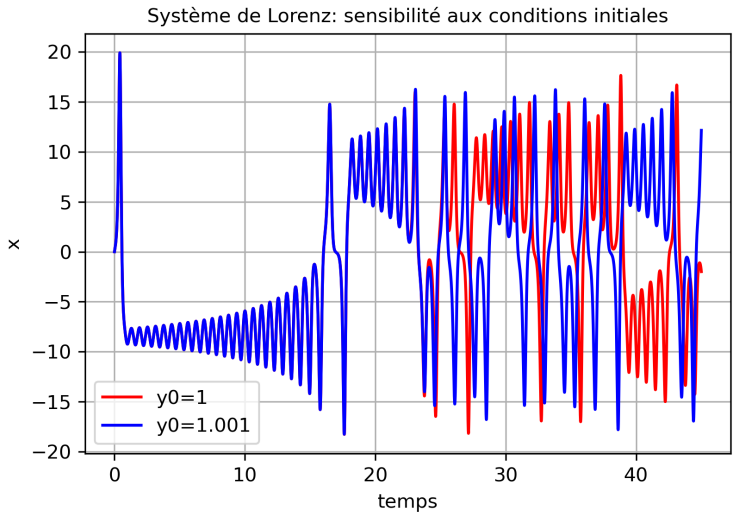
On prendra : $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ et $\rho = 28$.

Q1 – Résoudre ce système d'équations différentielles par la méthode d'Euler. Tracez la trajectoire dans l'espace $(x\ y\ z)$ pour une durée de temps de 45 (unité arbitraire) environ grâce aux commandes :

```
fig=plt.figure()
ax=plt.axes(projection='3d')
ax.plot3D(x,y,z,'b').
```

Il faut pour cela importer la bibliothèque `from mpl_toolkits import mplot3d`. Pour légender les axes, on a la commande `ax.set_xlabel('x')` etc.

On prendra comme conditions initiales : $x(t) = 0$, $y(t) = 1$ et $z(t) = 0$. Vous devez obtenir la courbe ci-dessous.



Q2 – Tracez sur une même courbe l'évolution de $x(t)$ en fonction du temps pour les deux conditions initiales suivantes : $x(t) = 0,\ y(t) = 1, z(t) = 0$ et $x(t) = 0,\ y(t) = 1.001, z(t) = 0$. Vous devez obtenir les courbes suivantes. Conclusion.