

TD 4 – Boucle FOR

A / Impression des premiers termes de la suite de Fibonacci

Ecrire une fonction `fibonacci (U0, U1, n)` qui retourne le nième terme de la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0; U_1 = 1 \\ U_n = U_{n-1} + U_{n-2} \end{cases}$$

Que pouvez vous dire du rapport $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} \right)$?

B / Pyramide des nombres

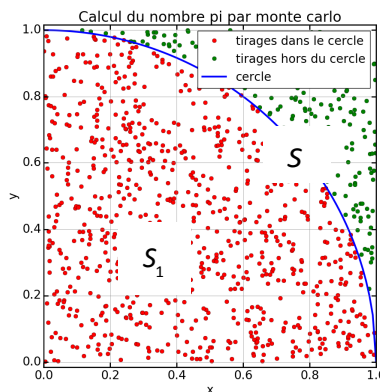
Ecrire une fonction `pyramide (n)` qui génère la pyramide des nombres ci dessous avec `n` lignes.

nombre de lignes : 10

```
1
232
34543
4567654
567898765
67890109876
7890123210987
890123454321098
90123456765432109
0123456789876543210
```

C / Calcul approché du nombre PI par une approche Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une méthode de calcul de l'aire d'une courbe reposant sur l'utilisation de nombres aléatoires. On considère le schéma ci dessous. Le principe consiste à tirer aléatoirement N couples d'abscisses et d'ordonnées comprises entre 0 et 1 et à comptabiliser le nombre N_1 de points correspondant qui sont dans la surface S_1 (en rouge sur le schéma).



Comme on a :

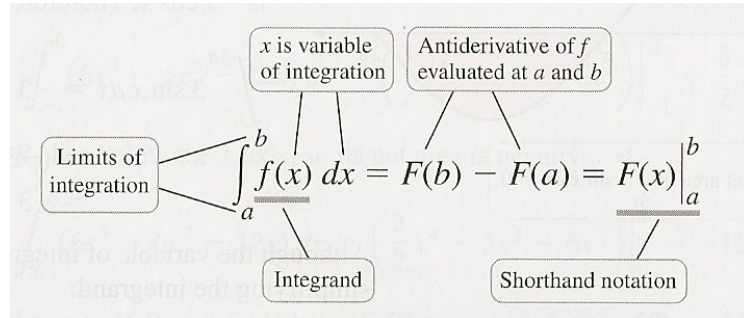
$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \pi r^2 / 4 = \pi / 4 \text{ car } r = 1 \\ S &= 1, \text{ surface totale du carré} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi = 4 \frac{S_1}{S}$$

L'idée est de considérer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{N_1}{N} \right) = \frac{S_1}{S}$ et ainsi $4 \frac{S_1}{S} \rightarrow \pi$ quand $N \rightarrow +\infty$.

📄 Ecrire une fonction `pi_monte_carlo(N)` qui détermine de façon approchée π par cette méthode. Pour le tirage d'un nombre aléatoire il faut utiliser la fonction `random` et l'importer de la bibliothèque correspondant en écrivant : `from random import random`. En écrivant `x=random()` vous obtenez un nombre aléatoire compris entre 0.0 et 1.0.

D / Calcul numérique d'une intégrale

Le concept d'intégrale joue un rôle fondamental en mathématiques et bien sûr dans les sciences naturelles (physique, chimie, sciences de l'ingénieur, biologie etc..). Vous connaissez tous le théorème fondamental du calcul qui permet de calculer l'intégrale d'une fonction :



La difficulté consiste à déterminer la primitive (antiderivative en anglais) F de la fonction f . Il est très souvent difficile voire impossible de déterminer F c'est pourquoi les scientifiques déterminent les intégrales de façon approchée (quand même très précise) par un calcul numérique. On peut calculer de façon approchée l'intégrale par la méthode dite de Simpson :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{3n} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{k=1}^{n/2} f(a + (2k-1)h) + 2 \sum_{k=1}^{(n/2)-1} f(a + 2kh) \right)$$

Ici, $h = \frac{(b-a)}{n}$ et n doit être un entier pair. L'objectif de cet exercice est d'écrire une fonction `Simpson(a, b, n)` qui retourne le côté droit de la relation encadrée.

📄 Ecrire un programme avec, entre autres, la fonction `Simpson(a, b, n)` qui permettra d'évaluer $\frac{3}{2} \int_0^\pi \sin^3 x dx$, dont la valeur exacte est 2, pour $n=2;6;12;100;500$. Le programme devra pour chaque cas afficher la valeur approchée de l'intégrale ainsi que l'erreur par rapport à la valeur exacte. Conclusion.