Informatique Pour Tous

TD 4 – Boucle WHILE

A / Table de multiplication

Ecrire une fonction `multiplication(n,k,j)` un programme qui affiche les `n` (par exemple 20) premiers termes de la table de multiplication par `k` (par exemple 7), en signalant au passage (à l'aide d'un astérisque) ceux qui sont des multiples de `j` (par exemple 3). Penser à utiliser l'opérateur modulo `%`.

B / Calcul approché d'un nombre

Pour tout nombre positif a, on peut trouver une suite infinie qui converge vers $\sqrt{a}$:

$$r_n = \frac{1}{2}\left(r_{n-1} + \frac{a}{r_{n-1}}\right),$$

pour $n \geq 1$ et r_0 quelconque positif.

Ecrire une fonction `racine(a,r0,epsilon)` qui calcule une approximation de $\sqrt{a}$, le dernier terme $r_{\max}$ de la suite des approximations étant caractérisé par :

$$\left|r_{\max}^2 - a\right| < \varepsilon.$$

ε (epsilon) est à choisir selon la précision souhaitée. Pour calculer la valeur absolue, vous pouvez utiliser la fonction `abs` de la bibliothèque `math`. Vous pourrez tester votre programme avec $\sqrt{2}$. Vous complétez votre fonction pour qu'elle retourne le nombre d'itérations nécessaires.

C / Conjecture de Syracus

En mathématiques, on appelle suite de Syracuse une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante : on part d'un nombre entier strictement positif ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et l'on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers strictement positifs dont chacun ne dépend que de son prédécesseur. Par exemple, à partir de 14, on construit la suite des nombres : 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2… C'est ce qu'on appelle la suite de Syracuse du nombre 14. Après que le nombre 1 a été atteint, la suite des valeurs (1,4,2,1,4,2…) se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3, appelé cycle trivial.

Si l'on était parti d'un autre entier, en lui appliquant les mêmes règles, on aurait obtenu une suite de nombres différente. A priori, il serait possible que la suite de Syracuse de certaines valeurs de départ n'atteigne jamais la valeur 1, soit qu'elle aboutisse à un cycle différent du cycle trivial, soit qu'elle diverge vers l'infini. Or, on n'a jamais trouvé d'exemple de suite obtenue suivant les règles données qui n'aboutisse pas à 1, puis au cycle trivial.
La conjecture de Syracuse est l'hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1.
En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années les mathématiciens. Paul Erdos a dit à propos de la conjecture de Syracuse : « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes » (source Wikipédia).

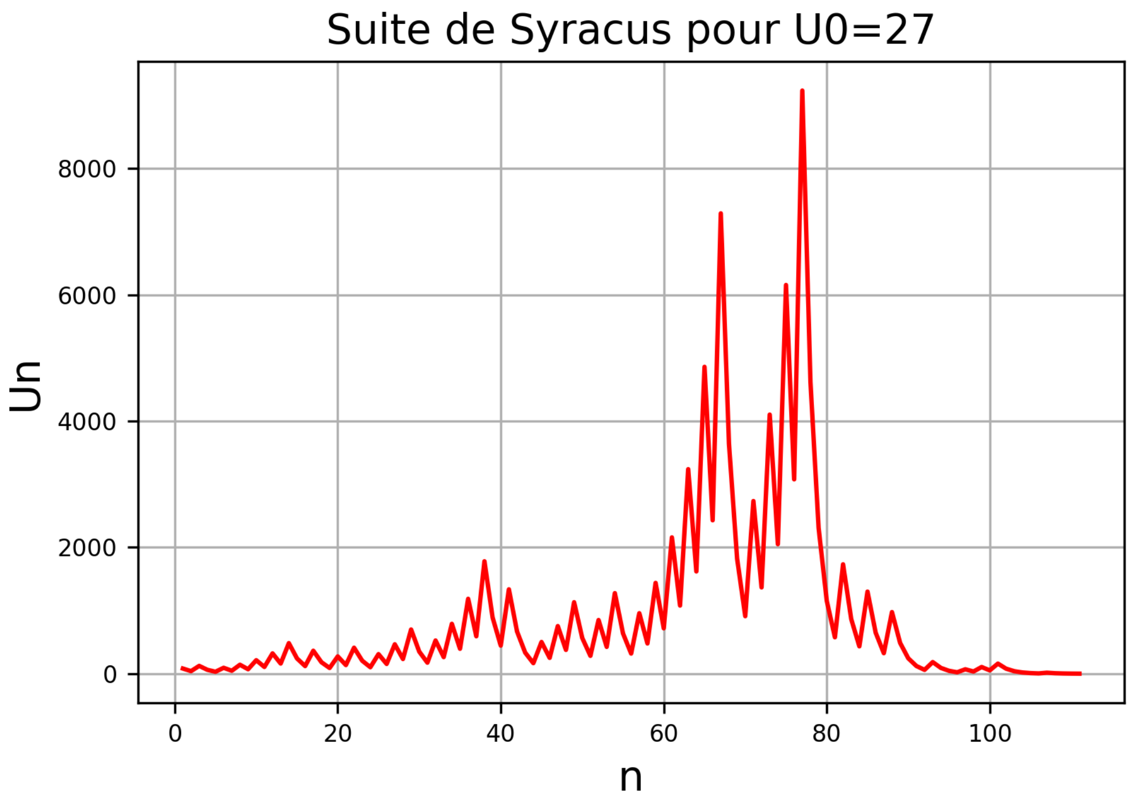
La suite de Syracus d'un nombre entier u_o (premier terme de la suite) est définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2 & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La conjecture affirme que pour tout entier $u_o > 0$, il existe un indice n tel que $u_n = 1$. u_o est appelé la **graine** de la suite. Le plus petit indice n tel que $u_n = 1$ est appelé **le temps de vol** de la suite.

Ecrire une fonction `syracus(u0)` qui retourne n, le temps de vol de la suite. Vous pouvez aussi afficher les éléments de la suite, tracez $u_n = f(n)$ etc. Voici deux exemples :

<u>Exemple 1 :</u> Temps de vol pour $u_0 = 27$: $n = 111$.



<u>Exemple 2 :</u> Temps de vol pour $u_0 = 15$: $n = 17$.