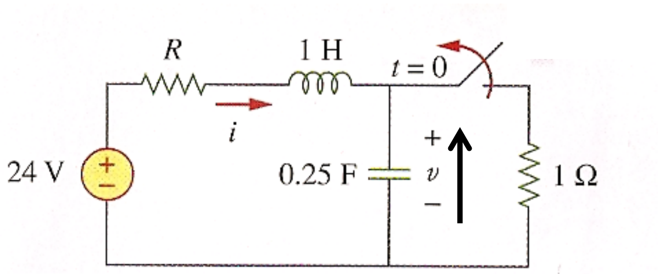
TD 7 – Les bibliothèques Numpy et Matplotlib

A / Circuit d'ordre 2 en régime transitoire

On considère le circuit ci-dessous. A $t > 0$, on ouvre l'interrupteur. On obtient par le calcul (je vous invite à le faire pour vous entraîner !) les résultats suivants :



$\Rightarrow$ Si $R = 5\ \Omega$:

$$\begin{cases} v(t) = 24 + \frac{4}{3}\left(-16e^{-t} + e^{-4t}\right) \text{ V} \\ i(t) = \frac{4}{3}\left(4e^{-t} + e^{-4t}\right) \text{ A} \end{cases}$$

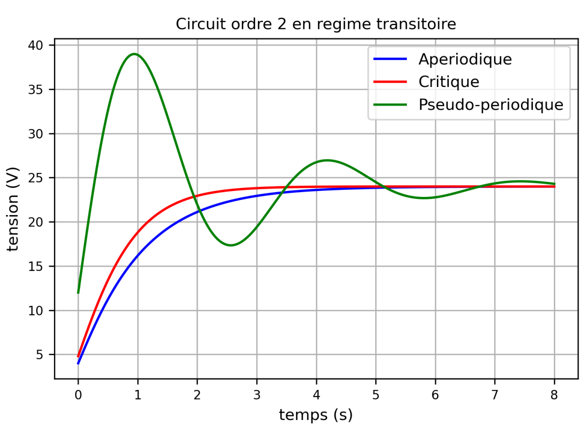
$\Rightarrow$ Si $R = 4\ \Omega$:

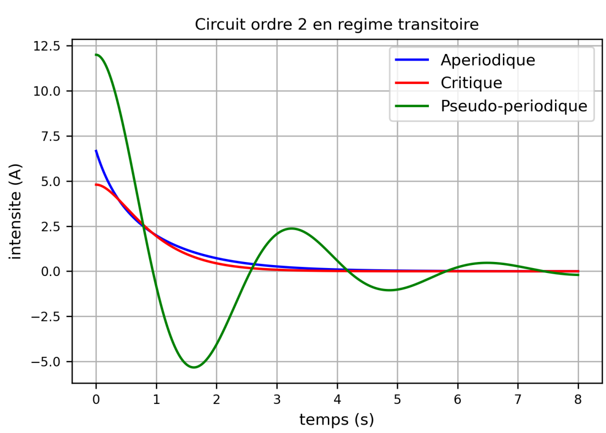
$$\begin{cases} v(t) = 24 - 19.2(1+t)e^{-2t} \text{ V} \\ i(t) = (4{,}8 + 9.6t)e^{-2t} \text{ A} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Si $R = 1\ \Omega$:

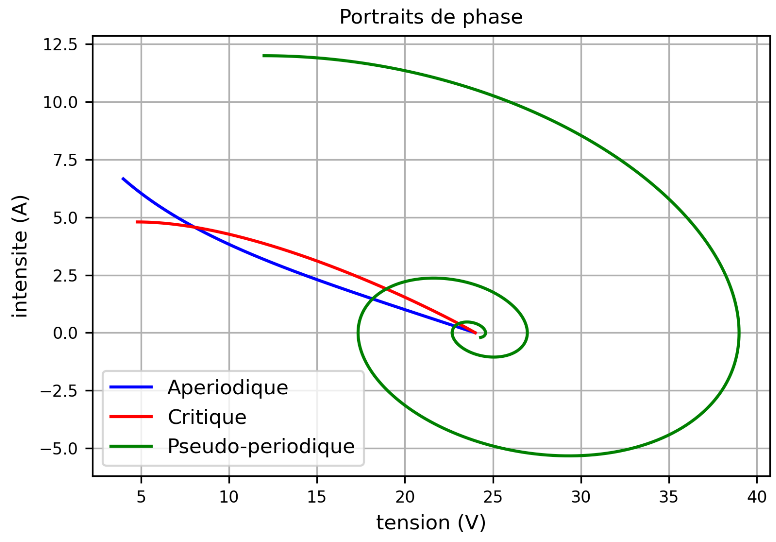
$$\begin{cases} v(t) = 24 + \left(21.694\sin(1.936t) - 12\cos(1.936t)\right)e^{-0{,}5t} \text{ V} \\ i(t) = \left(3{,}1\sin(1.936t) + 12\cos(1.936t)\right)e^{-0{,}5t} \end{cases}$$

Q1 – Ecrire un code qui permette de tracer deux figures. Sur le premier, on tracera les courbes (les plots) de la tension aux bornes du condensateur $v = f(t)$ (pour les différentes valeurs de R) et sur le deuxième, on tracera les courbes relatives à l'intensité $i = f(t)$ (pour les différentes valeurs de R). Les axes seront libellés, il y aura une légende etc… Voici, par exemple, les figures que vous devez obtenir :





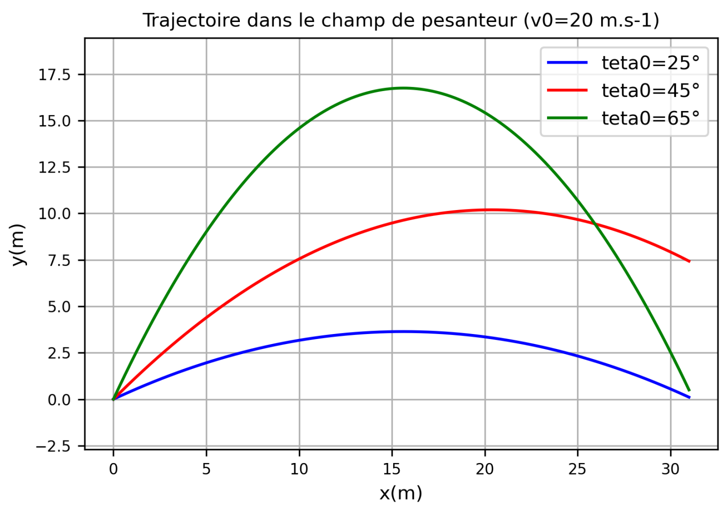
Q2 – Sur une troisième figure, pour chaque valeur de R, tracer le portrait de phase ; c'est à dire $\frac{dv}{dt}=\frac{i}{C}$ en ordonnée en fonction de la tension v en abscisse. Voici, par exemple, la figure que vous devez obtenir :



B / Trajectoire dans le champ de pesanteur terrestre

Ecrire un code qui permette de tracer la trajectoire d'un ballon $y=f(x)$ (on prend y pour la verticale) dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}=-g\,\vec{j}$ (on néglige les frottements de l'air et autres effets). Vous prendrez comme vitesse initiale $v_0=20\ \text{m.s}^{1}$. Il faudra nommer les axes, mettre des légendes, des titres etc.

Vous pourrez tracer différentes courbes (sur la même figure) pour différents angles initiaux de tir θ_0 $\left(25°,\ 45°,\ 65° \text{ par exemple}\right)$ et vérifier que la portée est maximale pour un angle de 45 °. La commande `plt.axis('equal')` permet d'avoir la même échelle sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées. Voici, par exemple, la figure que vous devez obtenir :



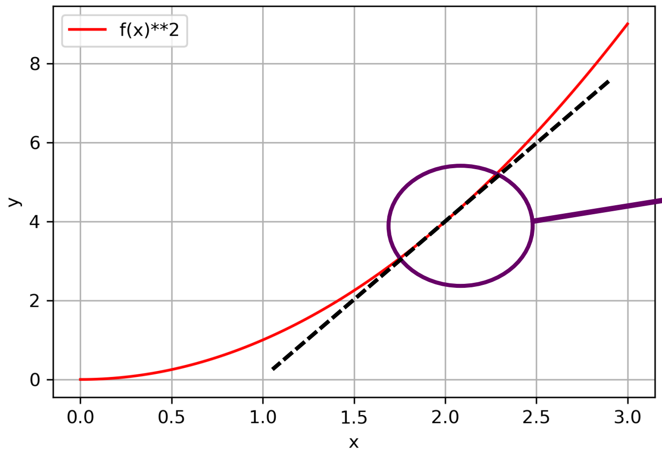
Rappels de cinématique :

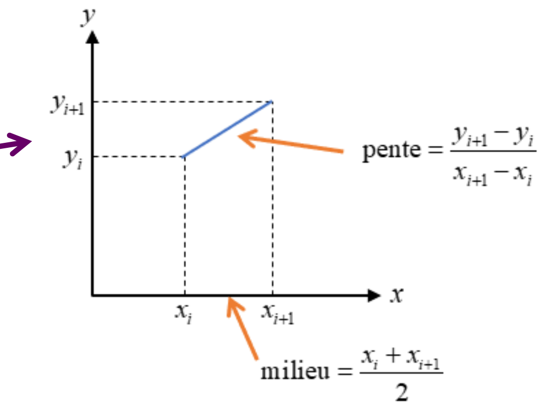
$$\vec{a}:\begin{cases}a_x=0\\ a_y=-g\end{cases}\qquad \vec{v}:\begin{cases}v_x(t)=v_0\cos\theta_0\\ v_y(t)=-gt+v_0\sin\theta_0\end{cases}\qquad \overrightarrow{OP}:\begin{cases}x(t)=\left(v_0\cos\theta_0\right)t\\ y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+\left(v_0\sin\theta_0\right)t\end{cases}\qquad y(x)=-\left(\frac{g}{2v_0^2\left(\cos\theta_0\right)^2}\right)x^2+\left(\tan\theta_0\right)x$$

C / Dérivation numérique

Comment calculer numériquement la dérivée en un point d'une fonction ?

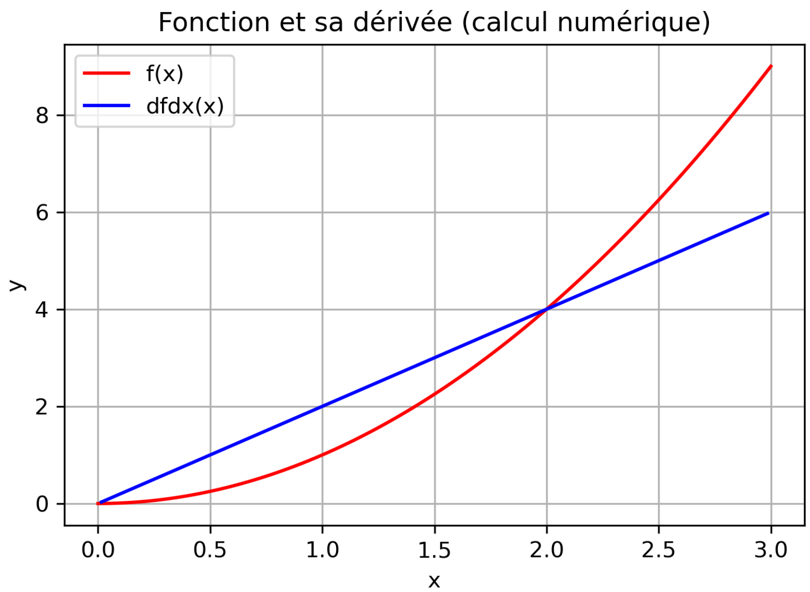
Nous allons aborder le calcul numérique de la dérivée d'une fonction que l'on connait $f(x)$ pour des abscisses x_i. Une **dérivation numérique** peut se faire simplement en calculant la **pente de la courbe.** Nous allons considérer que nous disposons au préalable des valeurs de la fonction en `nbx` points de coordonnées (x_i, y_i) où $y_i = f(x_i)$. Le nom de variable `nbx` est choisi pour signifier nombre de x. Une approximation numérique de la dérivée est obtenue en calculant la pente entre deux points de coordonnées (x_i, y_i) et (x_{i+1}, y_{i+1}). La pente correspond au coefficient directeur de la droite qui passe par ces deux points.





Comme la pente est calculée entre deux abscisses x_i et x_{i+1}, on associera cette dérivée à l'abscisse située au milieu. On stocke les valeurs des nouvelles abscisses dans un tableau `xnew` avec $x_{i,new} = (x_i + x_{i+1})/2$. Il est important de noter qu'il y aura seulement nbx−1 valeurs pour `xnew`. Le pas est constant. Les valeurs de la dérivée seront stockées dans un tableau `dydp` avec : $dydp = (y_{i+1} - y_i)/(x_{i+1} - x_i)$.

On prendra comme exemple la fonction $f(x) = x^2$ pour $x \in [0,3]$ avec 100 valeurs (`nbx=100`). Ecrire un code qui permette de tracer la fonction $f(x)$ ainsi que sa dérivée sur l'intervalle $[0,3]$. Vous devez obtenir le résultat suivant :



.