TD 22 – Partie 1 – Découverte des graphes

Dans ce TD, il est imposé d'utiliser la bibliothèques ***Numpy*** du langage python pour la gestion des matrices.

Rappels : une matrice carrée de taille N s'initialise remplie de zéros :

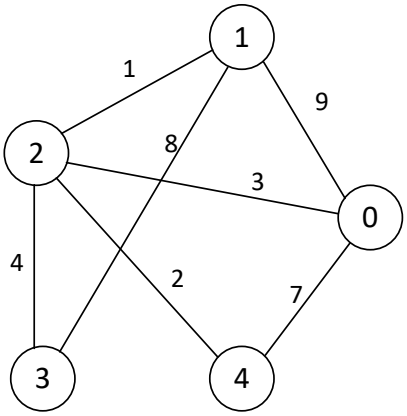
```
import numpy as np
M = np.zeros( [N,N] )
```

puis on parcoure la matrice et on remplace le « zéro » en position $M_{i,j}$ (i^{ème} ligne, j^{ème} colonne) par l'expression désirée :

```
for i in range(N) : # i num de ligne, i va de 0 à N-1
    for j in range(N) :  # j num de colonne
        M[i,j] = ...  # M[i,j] désigne l'élément ième ligne jème colonne
                      # à écraser le 0 actuel par la valeur voulue.
                      # Vous pouvez bien sûr mettre ici un « if » et
                      # n'écraser M[i,j] que sous certaines conditions
```

Coût d'un chemin sur un graphe pondéré non orienté

On considère le graphe $G = (S, A)$ ci-contre, où le nombre situé sur l'arête joignant deux sommets est leur distance, supposée entière et positive.



Pour *Python*, nous noterons :

```
S = [0,1,2,3,4]  # l'ensemble des sommets
A = { 0:{1:9,2:3,4:7}, 1:{0:9,2:1,3:8}, 2:{0:3,1:1,3:4,4:2},
      3:{1:8,2:4}, 4 :{0:7,2:2} }
```

A est une liste d'adjacence pondérée, ici représentée sous forme de dictionnaire de dictionnaires. Le poids entre deux sommets *i* et *j*, s'il existe, s'appelle $A[i][j]$.

On prendra pour convention que la distance entre un sommet et lui-même vaut 0. Attention, vous noterez que dans le dictionnaire `A`, aucune distance n'a été renseignée entre un élément et lui-même. Vous n'avez pas le droit de modifier `A`.

Q1 – Écrire une fonction `Mat_dist (S_adj, Dico_adj)` prenant en argument une liste des sommets et un dictionnaire des adjacences (même format que `S` et `A` présentés ci-dessus, mais de taille quelconque, pas forcément 5 sommets). Et qui renvoie la matrice des distance, définie et calculée comme suit :

- *Chaque élément $M_{i,j}$ de la matrice renvoyée correspond à la distance directe, si elle existe, entre les deux sommets i et j.*
- *On convient que, si les sommets ne sont pas reliés par une arête, cette distance vaut −1.*
- *La distance du sommet i à lui-même est prise, par convention ici, égale à 0.*
- *Vous complèterez d'abord le triangle supérieur ($j > i$) (2 boucles for imbriquées)*
- *Puis dans un second temps, vous complèterez le triangle inférieur ($i < j$) par symétrie, car $M_{i,j} = M_{j,i}$*
  Aide : `np.transpose(Mat)` est une méthode qui renvoie la transposée d'une matrice `Mat`.

Q2 – À l'aide de votre fonction, générer la matrice `M`, **variable globale**, liée au graphe donné dans l'énoncé. Afficher cette matrice et vérifier à la main que le résultat obtenu est cohérent.

Q3 – Écrire une fonction `voisins(Mat,i)` prenant en argument une matrice des distances `Mat` et un numéro de sommet `i` et qui renvoie la liste des sommets voisins du sommet `i`.
Tester votre fonction pour afficher les voisins de 2 (d'une part) et de 4 (d'autre part).

Q4 – Écrire une fonction `degre(Mat,i)` prenant en argument une matrice des distances `Mat` et un numéro de sommet `i` et qui renvoie le degré du sommet `i`, c'est-à-dire le nombre d'arêtes issues de ce sommet.
Tester votre fonction pour afficher le degré de 2 (d'une part) et de 4 (d'autre part).

Nous prendrons la convention qu'un chemin est représenté par une liste de valeurs de *S* (les sommets). Par exemple, le chemin 0→1→3→2→4 sera traduit par la liste `[0,1,3,2,4]`.

Q5 – Écrire une fonction `chem_valide(Mat,chem)` prenant en argument une matrice des distances `Mat` et un chemin décrit tel que ci-dessus, et qui renvoie un booléen : *True* s'il est possible de faire le chemin dans le graphe, *False* sinon.

Exemple : pour tester votre fonction

```
chem_valide(M, [0,1,3,2,4]) # doit renvoyer True
chem_valide(M, [0,4,3]) # doit renvoyer False car 4
                        # et 3 ne sont pas voisins.
```

Q6 – Écrire une fonction `longueur(Mat,chem)` prenant en argument une matrice des distances `Mat` et un chemin, et qui :

- Teste si le chemin est invalide. Si c'est le cas elle lève une assertion :

```
assert ..., "erreur"    # à vous de remplir la condition
# en complétant les … (déclenche la détection d'erreur et la sortie de la fonction)
```

- Dans le cas contraire (chemin valide), elle renvoit la longueur du trajet décrit par cette liste `chem`, c'est à dire la somme des longueurs des arêtes empruntées.

Pour tester votre fonction,

```
longueur(M, [0,1,3,2,4]) # doit renvoyer 23
longueur(M, [0,4,3])  # doit générer une erreur
```