CINEMATIQUE : DESCRIPTION DU MOUVEMENT D'UN POINT

« La philosophie est écrite dans ce vaste livre constamment ouvert devant nos yeux (je veux dire l'univers), et on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Or il est écrit en langue mathématique, et ses caractères sont le triangle et le cercle et autres figures géométriques, sans lesquelles il est humainement impossible d'en comprendre un mot»

Galilée (1564-1642)

I – INTRODUCTION

La cinématique s'intéresse à la description du mouvement d'un corps physique indépendamment de ses causes, alors que la dynamique (objet du prochain chapitre), le pilier de la mécanique, a pour objet l'étude des **causes de la modification du mouvement**. Pour résumer, on peut noter :

Mécanique = Cinématique + Dynamique

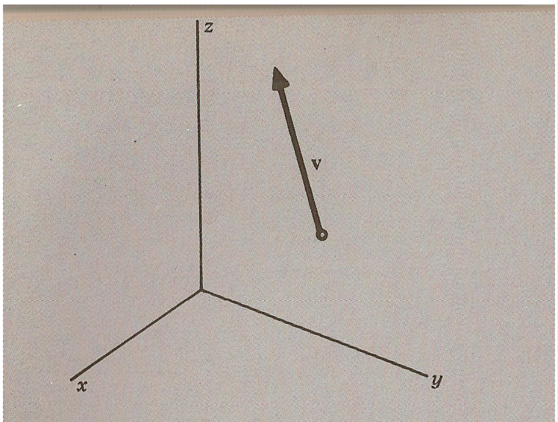
Dans le cours de sciences physiques de PTSI, nous allons étudier le mouvement de deux corps physiques idéalisés :

✔ **LE POINT MATERIEL OU PARTICULE**. Un point matériel est un **modèle commode** pour représenter un corps physique réel. Ce modèle est valable si les dimensions du corps physique sont faibles par rapport à la distance d'observation (de celui qui observe le mouvement). Par exemple, la navette spatiale peut-être assimilée à un point matériel pour un observateur terrestre mais pas pour son commandant de bord. En effet pour ce dernier, la navette a des dimensions spatiales, elle peut tourner sur elle-même etc…

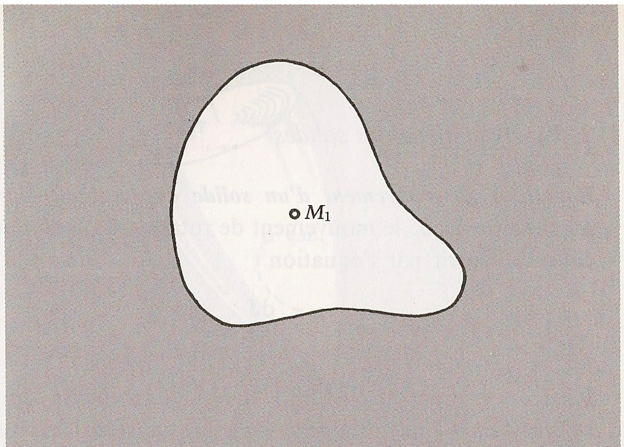
Décrivons de façon plus précise un point matériel :

- Il s'agit d'un objet **sans dimension, sans forme** (un point au sens des mathématiques).
- Le mouvement d'un point matériel se déroule dans l'espace et dans le temps. La connaissance de ce mouvement nécessite la connaissance de **trois coordonnées** (x,y,z ou r,θ,z …) dépendant du **paramètre temps**.
- Un point matériel est caractérisé par sa **masse** notée m. Il s'agit d'une grandeur scalaire (un nombre pur) dont l'unité est le kilogramme (kg). La masse est une grandeur invariante dans le temps et ne dépend pas du référentiel d'étude.

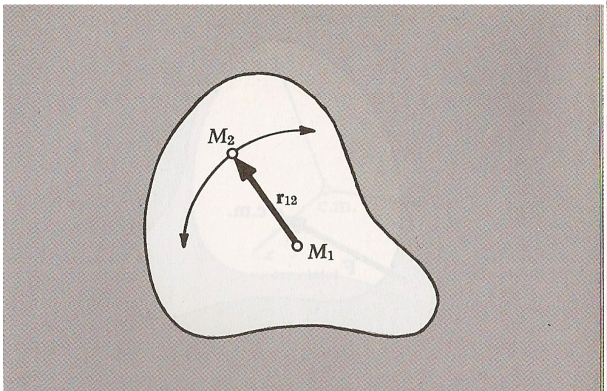
✔ **LE SOLIDE INDEFORMABLE**. Nous allons supposés dans ce cours que les solides, corps physiques massiques constitués d'atomes et de molécules, sont indéformables. Dans ce cas, tous les points du solides garderont des distances respectives inchangées au cours du temps. Il s'agit d'un modèle idéalisé, qui est très pertinent dans de nombreux cas. Cependant, les ingénieurs et les scientifiques savent que les matériaux, même solide, se déforment et il faut en tenir compte, notamment dans la construction des infrastructures. Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut 6 coordonnées : 3 pour indiquer la position de son centre de masse et 3 supplémentaires pour indiquer l'orientation spatiale du solide par rapport au centre de masse (cf. figure ci-dessous). Dans notre programme, nous allons simplement étudier des solides en **mouvement de translation** ou en **rotation autour d'un axe fixe**. Le mouvement le plus général du solide est une combinaison de ces deux mouvement et peu s'avérer difficile à étudier (vous verrez peut-être cela en école d'ingénieur).



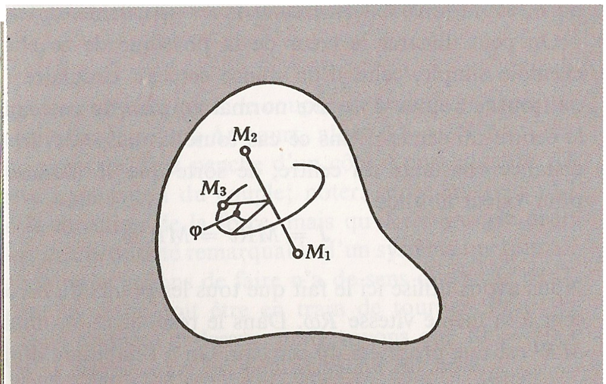
Une particule qui se déplace sans contrainte a trois degrés de liberté ($f = 3$).



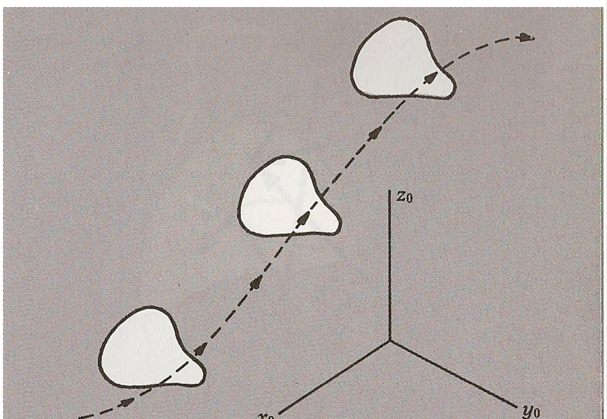
Supposons que nous choisissions une particule M_1 dans le corps. Elle a trois degrés de liberté.



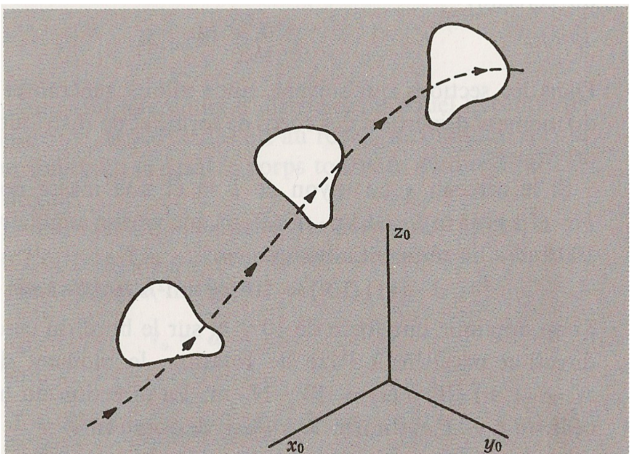
Une fois qu'on a choisi un repère dans lequel M_1 est fixe, M_2 n'a plus que deux degrés de liberté, car il doit se déplacer sur la surface d'une sphère de rayon $\mathbf{r}_{12}$.



Une fois qu'on a choisi un repère dans lequel M_1 et M_2 sont fixes, tout autre particule dans le corps n'a qu'un degré de liberté, car elle doit se déplacer sur le cercle indiqué. Ainsi $f = 6$ pour un corps solide.



Autre façon de voir cela : Notre corps rigide peut être translaté sans tourner par rapport à un repère d'inertie ($x_0y_0z_0$). Il y a trois degrés de liberté de translation.



En plus il peut tourner. Il y a trois degrés de liberté de rotation, de sorte que $f = 3 + 3 = 6$.

II – LA MECANIQUE CLASSIQUE ET SA PLACE DANS LA PHYSIQUE

2.1 - Rapide historique

⇒ XVII$^{\text{ème}}$ Siècle

• Galilée, introduction de la notion de vitesse et du mouvement uniformément accéléré en termes précis. Utilisation du langage mathématiques pour décrire la nature.

• 1687 : Newton publie « Les principes mathématiques de la philosophie naturelle », fondement de la mécanique classique, notions de force, d'accélération, de gravitation etc…

⇒ Début du XX$^{\text{ème}}$ siècle

• 1905 : Einstein publie la théorie de la relativité restreinte (sans oublier les travaux précurseurs de Poincaré et Lorentz). C'est la remise en cause de la mécanique de Newton (la vitesse de la lumière est constante, le temps n'est plus absolu, concept d'espace-temps…).

• 1916 : Einstein publie la théorie de la relativité générale. Les objets massifs déforment l'espace-temps, explication géométrique de la gravité.

⇒ De 1900 à 1930

Elaboration de la mécanique quantique (Shrödinger, Heisenberg, Bohr, De Broglie), remise en cause de la notion de vitesse et de position, description des particules en termes de probabilité de présence.

⇒ De 1930 à 1950

Elaboration d'une mécanique quantique et relativiste (Dirac, Pauli, Feynman, Schwinger, Tomonaga).

2.2 - Les types de mécanique

Les propos qui suivent sont adaptés de l'introduction du livre Introduction to Electrodynamics par David J. Griffiths, 4$^{\text{ème}}$ édition, chez Pearson Addison-Wesley, 2012. C'est un livre que je vous recommande fortement si vous devez approfondir l'étude de l'électromagnétisme après votre CPGE.

Le tableau ci-dessous illustre **les quatre « royaumes » de la mécanique**.

PETIT →

Mécanique classique ***(Newton)***	***Mécanique quantique*** ***(Bohr, Heisenberg, Shrödinger, et al.)***
Mécanique relativiste ***(Einstein)***	***Théorie quantique des champs*** ***(Dirac, Pauli, Feynman, Schwinger, Tomonaga, et al.)***

↓ RAPIDE

La mécanique classique (ou mécanique Newtonienne) s'est révélée incomplète au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Elle fonctionne très bien pour décrire les phénomènes de la vie « quotidienne » mais pour des objets à très grande vitesse (proche de celle de la lumière), elle est incorrecte et doit être remplacée

par **la mécanique relativiste** (restreinte et/ou générale). Pour des objets extrêmement petits, elle ne fonctionne pas non plus (pour diverses raisons) et doit être remplacée par **la mécanique quantique**. Pour décrire des objets à la fois rapides et petits (comme c'est le cas dans l'étude des particules élémentaires), il faut une mécanique à la fois relativiste et quantique : c'est la mécanique quantique relativiste ou, de façon plus correcte, **la théorie quantique des champs** (élaborée dans les années 1930-50). Même cette dernière mécanique n'est pas complètement satisfaisante à l'heure actuellement (les expériences qui auront lieu au CERN, grâce au LHC, dans les prochaines décennies, permettront sans doute de compléter les choses).
En CPGE, nous n'étudierons que la mécanique classique même si nous parlerons un peu de physique quantique dans le cours sur l'architecture de la matière en chimie.

2.3 - Quatre forces fondamentales

La mécanique nous informe de la façon dont va se comporter un système quand ce dernier est soumis à une force. Dans la nature, nous connaissons (actuellement) **seulement quatre forces fondamentales** (on parle aussi d'interactions) :

1- *Forte*
2- *Electromagnétique*
3- *Faible*
4- *Gravitationnelle*

La brièveté de cette liste peut surprendre ? qu'en est-il des forces de friction ? De la force qui nous maintient au sol ? Des forces chimiques qui lient les molécules entre elles ? Toutes ces forces ont pour origine une des quatre forces précédentes. En fait, dans la vie de tous les jours, à l'exception notable de la gravité qui nous cloue au sol, toutes les forces que nous rencontrons sont d'origine **électromagnétique** (nous en reparlerons dans le cours d'électromagnétisme). **La force forte** qui lie les protons et les neutrons ensemble dans le noyau atomique est à très faible portée et nous ne la ressentons pas, même si elle est une centaine de fois plus intense que la force électromagnétique. **La force faible** est responsable de certains processus radioactifs dans les noyaux. Elle n'est pas seulement à courte portée, elle est aussi beaucoup plus faible que l'interaction électromagnétique. Enfin, la force de gravité est de loin la plus faible de toutes et c'est seulement à cause de concentrations énormes de masses (comme la terre, le soleil) que nous percevons ses effets. La force de répulsion électrostatique entre deux électrons est 10^{42} fois plus intense que la force d'attraction gravitationnelle. Si les atomes étaient liés par la force de gravité et non par la force électromagnétique, un simple atome d'hydrogène serait plus large que l'univers connu !
Il faut bien faire la distinction entre, d'une part, **un type de mécanique** et, d'autre part, **une loi de force particulière**. Par exemple, la loi universelle de la gravitation de Newton décrit une force

particulière, la gravité, alors que les trois lois de Newton définissent une mécanique particulière, la mécanique classique qui gouverne (dans son domaine de validité) toutes les forces. Une loi de force nous dit ce que vaut $\vec{F}$, une mécanique nous dit comment utiliser $\vec{F}$ pour déterminer le mouvement des particules. En CPGE, vous allez travailler essentiellement dans le cadre de la mécanique classique et rencontrer deux forces fondamentales : la gravité (loi universelle de la gravitation de Newton) et la force électromagnétique gouvernée par les quatre équations de Maxwell. Il existe une loi de force électromagnétique dans le cadre de la théorie quantique des champs, on parle d'électrodynamique quantique. Il s'agit de la théorie la plus précise que l'on possède à l'heure actuelle en termes d'accord entre les mesures expérimentales et les prédictions théoriques. Il n'existe toujours pas de loi complètement satisfaisante pour la gravité dans le cadre de la théorie quantique des champs. Par contre, la force forte et la force faible ont été dès le départ élaborées dans le cadre de la théorie quantique des champs (elles n'existent pas dans le cadre de la mécanique classique). Le but des physiciens est de trouver une loi de force unique capable de décrire les quatre forces en une seule et ceci dans le cadre d'une mécanique unique. Actuellement, c'est la **théorie des cordes** qui semble la plus prometteuse pour atteindre ce but mais la route est encore longue et difficile (il y a du travail pour de futurs physiciens). Il faut noter que dans les années 1960, la force faible et la force électromagnétique ont été unifiées (Glashow, Weinberg, Salam). Ces deux forces sont deux facettes d'une seule force, **la force électrofaible**. Cette unification a été parfaitement vérifiée expérimentalement dans les années 1980-90 auprès des accélérateurs de particule comme le LEP au CERN.

III – REPERE D'ESPACE ET REFERENTIEL

3.1 - Repère d'espace

On appelle **repère d'espace** un ensemble de points dont les distances sont invariables au cours du temps. Un tel ensemble est aussi appelé un solide de référence. Par exemple une table, un bateau, la terre peuvent servir de repère d'espace.

3.2 - Système de coordonnées

On exprime la position d'un objet par rapport à un système de coordonnées qui est constitué d'un **ensemble de trois axes** dont chacun correspond à une **direction de l'espace** et qui est considéré comme **fixe** par rapport à un repère d'espace. On dit que le système de coordonnées est lié au repère. Dans la suite, nous allons utiliser les systèmes de coordonnées suivants :

⇒ Cartésien

⇒ Polaire (cylindrique à 2D)

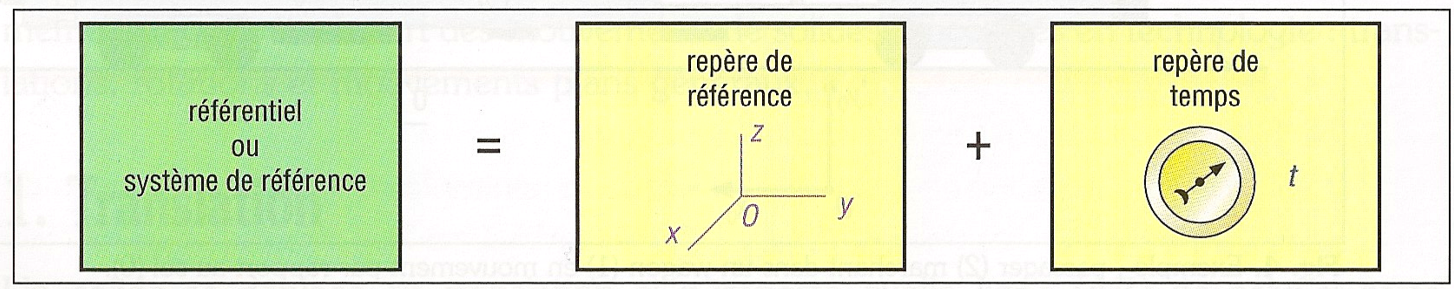
⇒ Cylindrique

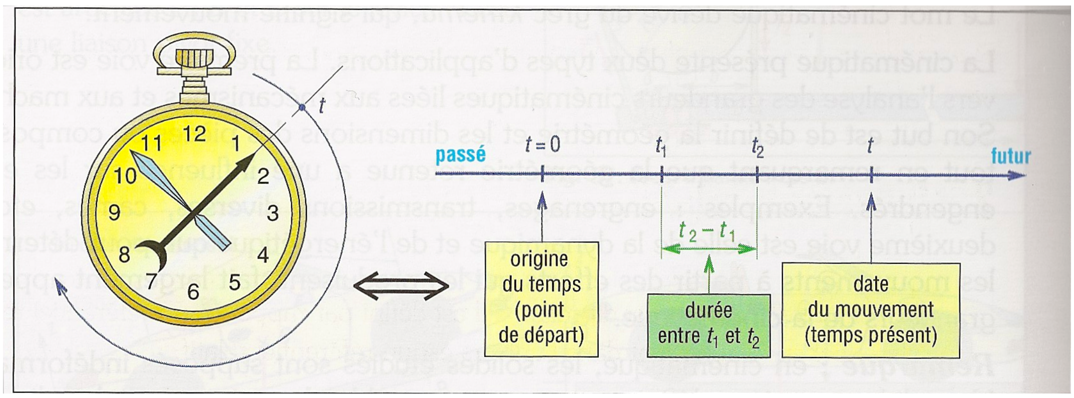
⇒ Sphérique

3.3 - Référentiel

Un ensemble formé d'un repère d'espace et d'un repère de temps (un ensemble d'horloges synchronisées) constitue un **référentiel**, c'est-à-dire une référence spatiale et une référence temporelle, toutes deux indispensables dans l'étude de tout mouvement.

Référentiel = Repère d'espace + Repère de temps





IV – MOUVEMENT DANS L'ESPACE

Dans la suite, on travaille dans un certain référentiel $\mathfrak{R}$ qu'il n'est pas nécessaire pour l'instant de préciser. Mais pour fixer les idées, nous pouvons travailler dans le référentiel dit du laboratoire constitué du bâtiment de physique du lycée auquel nous attachons trois axes fixes (par exemple orthonormés) et muni d'une horloge.

Dans cette partie, nous allons définir le vecteur **position**, le vecteur **vitesse** et le vecteur **accélération**. Un vecteur est un objet mathématique dont l'existence est indépendante du système de coordonnées utilisées. Mais pour débuter, après avoir défini de façon intrinsèque ces vecteurs (c'est-à-dire de façon indépendante du système de coordonnées utilisé), nous les exprimerons d'abord en coordonnées cartésiennes. Ensuite seulement, nous exprimerons ces vecteurs en coordonnées polaires puis en coordonnées cylindriques.

4.1 - Le vecteur position

La position dans l'espace d'un point matériel est indiquée par le **vecteur position** $\vec{r}(t) \equiv \overrightarrow{OP}(t)$ où O est un point fixe quelconque du référentiel d'étude et $P(t)$ la position du point matériel à l'instant t considéré.

Vecteur position : $\vec{r}(t) \equiv \overrightarrow{OP}(t)$

En coordonnées cartésiennes, dans la base orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ avec $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ des vecteurs unitaires fixes dans le temps (cf. figure ci-contre), le vecteur position s'exprime de la façon suivante :

Vecteur position en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{r}(t) \equiv x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

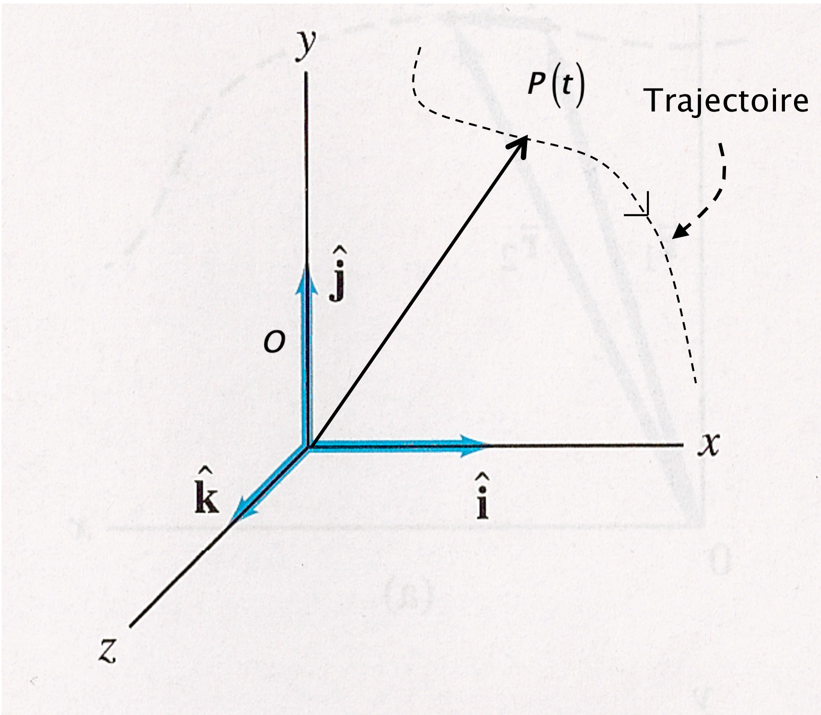


FIGURE 3–15 Unit vectors $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, and $\hat{\mathbf{k}}$ along the x, y, and z axes.

4.2 - Le vecteur déplacement

Soit P_1 la position du point matériel à l'instant t_1 et P_2 sa position à l'instant t_2 (cf. figure ci-contre). Le **vecteur déplacement** est défini par :

$$\text{Vecteur déplacement : } \quad \Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

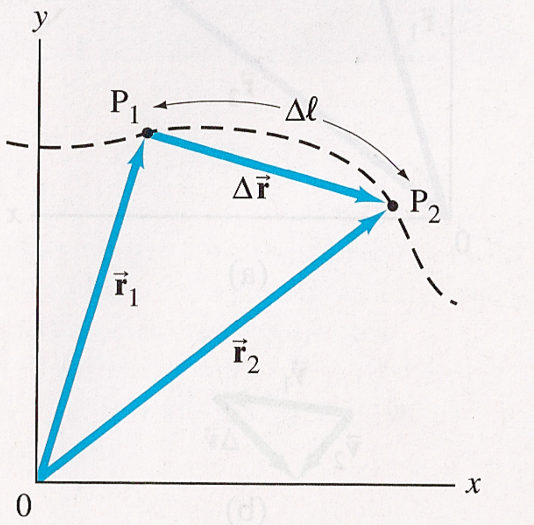
ou $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}(t_2)$ et $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}(t_1)$.

Dans le cours de sciences physiques, le symbole Δ indique toujours la variation d'une grandeur physique quelconque X entre deux valeurs : $\Delta X = X_2 - X_1$

En coordonnées cartésiennes, nous obtenons :

$$\text{Vecteur déplacement en coordonnées cartésiennes : } \quad \Delta\vec{r} \equiv (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

FIGURE 3–16 Path of a particle in the xy plane. At time t_1 the particle is at point P_1 given by the position vector $\vec{\mathbf{r}}_1$; at t_2 the particle is at point P_2 given by the position vector $\vec{\mathbf{r}}_2$. The displacement vector for the time interval $t_2 - t_1$ is $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$.



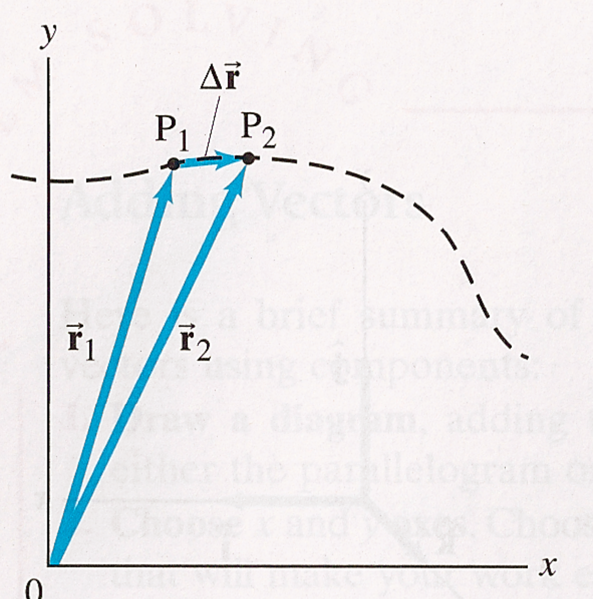
4.3 - Le vecteur vitesse moyen et le vecteur vitesse instantané

Pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$, le vecteur vitesse moyen est défini par (cf figures ci-dessous):

$$\text{Vecteur vitesse moyen : } \quad \overrightarrow{v_{moy}} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

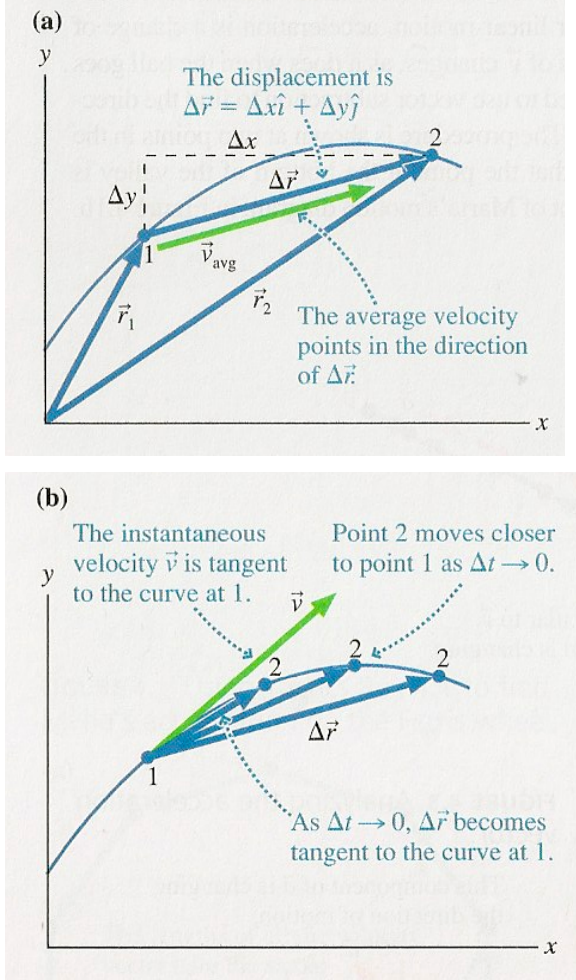
On considère à présent des intervalles de temps Δt de plus en plus courts. Ainsi la distance entre P_1 et P_2 tend aussi vers zéro. On définit alors le **vecteur vitesse instantané** comme la limite du vecteur vitesse moyen quand l'intervalle de temps Δt tend vers zéro :

$$\text{Vecteur vitesse instantané : } \quad \vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



(a)

Le vecteur vitesse instantané, noté simplement $\vec{v}$, (on l'appellera simplement vecteur vitesse par la suite) correspond à la dérivée du vecteur position. En un point donné , $\vec{v}$ **est tangent à la trajectoire** en ce point (cf. figure ci-contre).

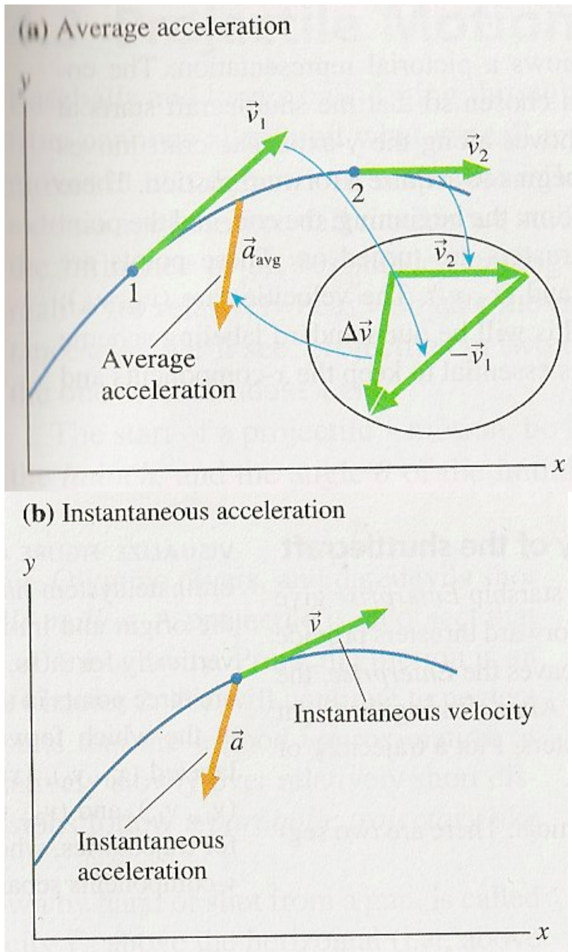


En coordonnées cartésiennes, $\vec{v}$ s'écrit :

> Vecteur vitesse instantané en coordonnées cartésiennes :
>
> $$\vec{v} \equiv \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Il faut noter que $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$ puisque les vecteurs de base sont constants au cours du temps en direction et en norme.

4.4 - Le vecteur accélération moyen et le vecteur accélération instantané



De façon analogue à $\overrightarrow{v_{moy}}$, on définit pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$, le vecteur accélération moyen par

> Vecteur accélération moyen : $\overrightarrow{a_{moy}} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

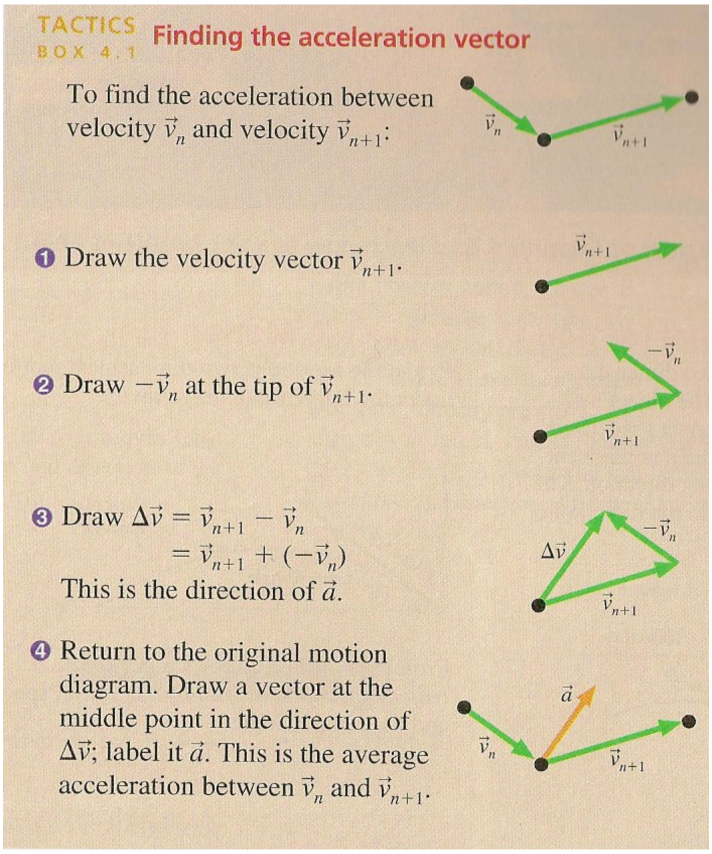
On considère à présent des intervalles de temps Δt de plus en plus courts. On définit alors le **vecteur accélération instantané** comme la limite du vecteur accélération moyen quand l'intervalle de temps Δt tend vers zéro :

> Vecteur accélération instantané :
>
> $$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Le vecteur accélération instantané, noté simplement $\vec{a}$, (on l'appellera simplement vecteur accélération par la suite) correspond à la dérivée première du vecteur vitesse et à la dérivée seconde du vecteur position.

Le vecteur $\vec{a}$ est non nul si la norme de $\vec{v}$ change mais aussi, si à norme de $\vec{v}$ constante, la direction de $\vec{v}$ change. De plus, pour une trajectoire courbe, $\vec{a}$ est toujours vers l'intérieur de la courbure comme cela est indiqué sur l'exemple de la figure suivante.

En coordonnées cartésiennes, $\vec{v}$ s'écrit :



Vecteur accélération instantané en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Remarques : Pour la dérivée par rapport au temps, on utilise aussi la notation « point », par exemple $\frac{dx}{dt}$ est aussi noté $\dot{x}$.

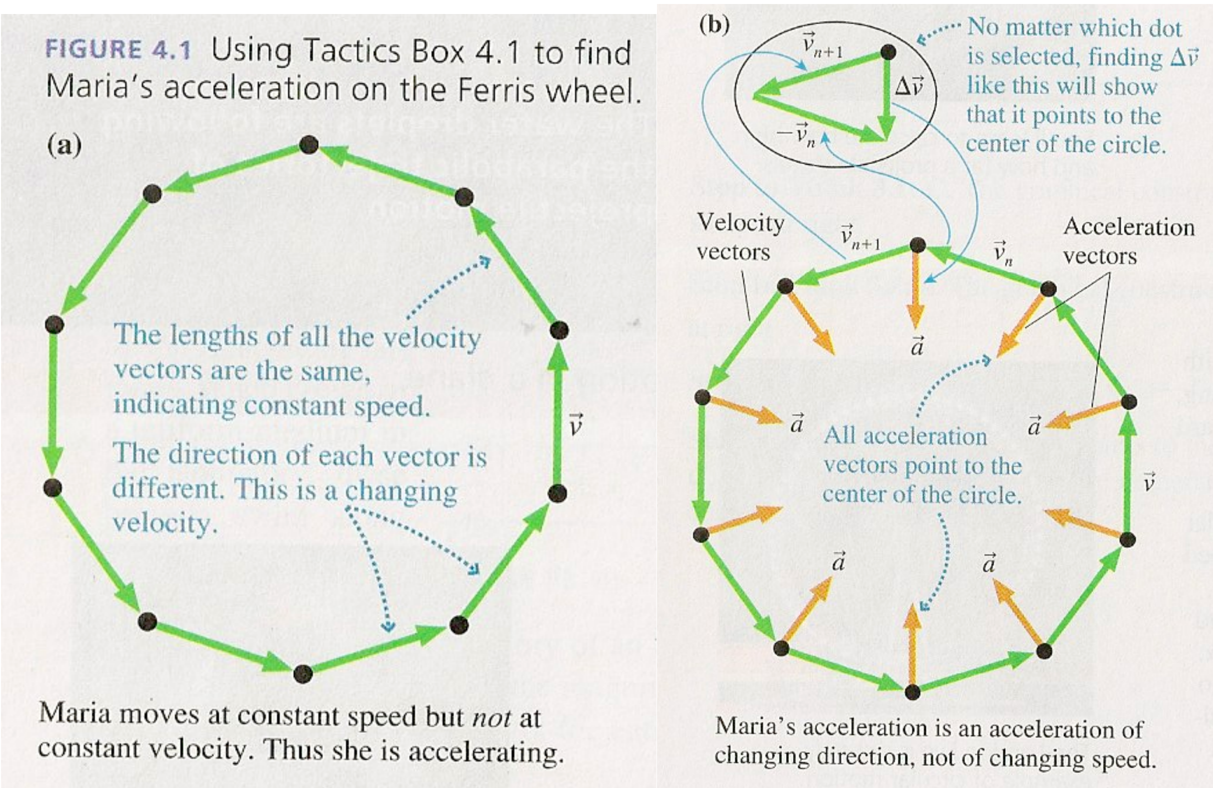


FIGURE 4.1 Using Tactics Box 4.1 to find Maria's acceleration on the Ferris wheel.

Maria moves at constant speed but *not* at constant velocity. Thus she is accelerating.

Maria's acceleration is an acceleration of changing direction, not of changing speed.

4.5 - Expression des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires, mouvement à deux dimensions

a) Les coordonnées polaires

En coordonnées polaires, un point est repéré par les variables $\boxed{r,\theta}$, comme indiqué sur la figure suivante, avec $r \in \left[0,\infty\right[$ et $\theta \in \left[0,2\pi\right]$. Le lien avec les coordonnées cartésiennes est immédiat : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

On travaille dans la base orthonormée directe $\boxed{P,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}}$. Il s'agit d'une **base locale** car elle est attachée au point mobile P (ce n'est pas le cas pour la base $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$). Les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ varient dans le temps, leur dérivée respective n'est donc pas nulle.

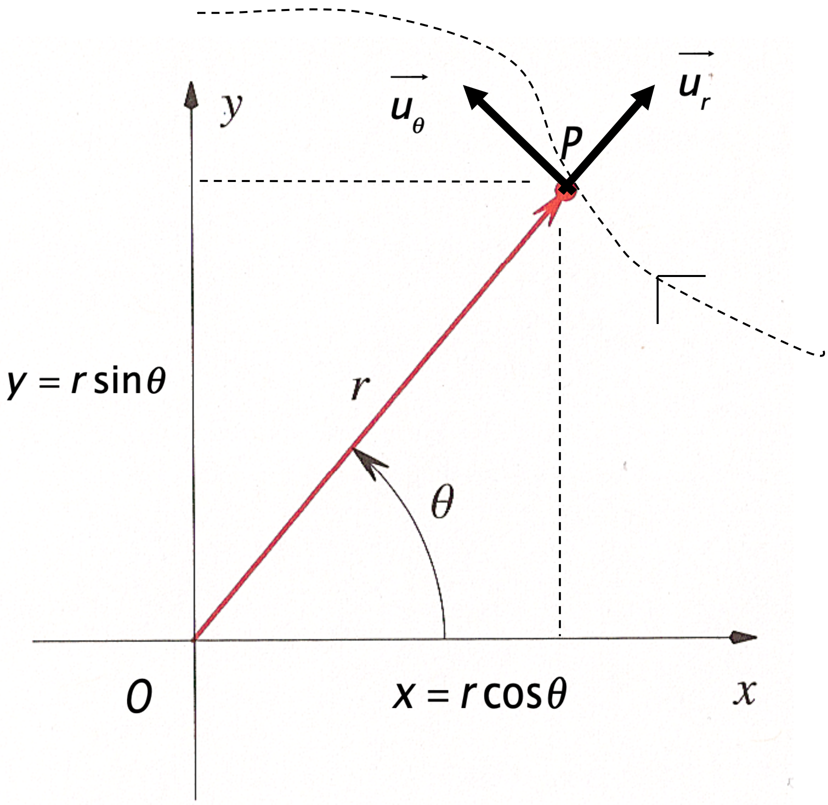


Figure 6.29
A point in a plane may be specified by its distance from the origin (r) and the angle that a line from the origin to the point makes with the x axis (θ). The quantities r and θ are called polar coordinates.

b) Le vecteur position

Son expression est très simple dans ce cas :

> Vecteur position en polaire :
> $$\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{u_r}$$

c) Résultats mathématiques importants

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}$$

d) Le vecteur vitesse

Vecteur vitesse en polaire : $\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$

(à savoir retrouver)

e) Le vecteur accélération

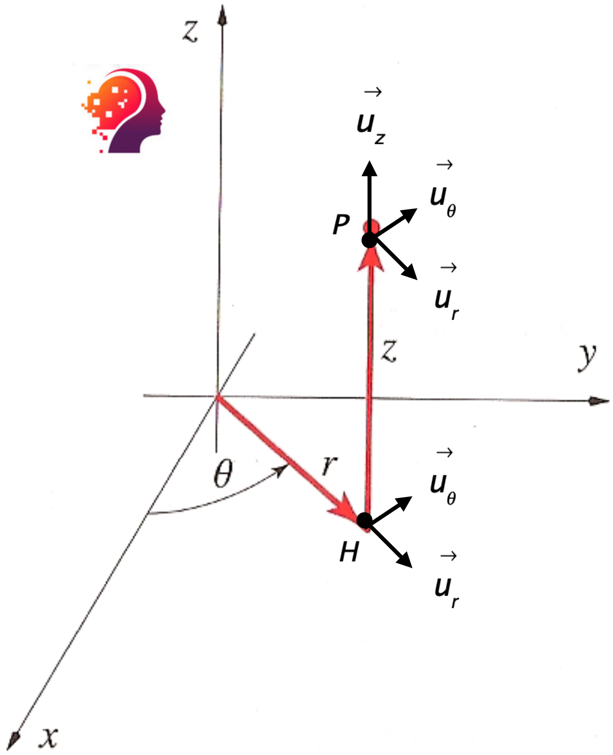
Vecteur accélération en polaire : $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$

(à savoir retrouver)

Exercice d'application 1
Démontrer les résultats des paragraphes c), d) et e) précédents.

4.6 - Expression des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques, mouvement à trois dimensions

Il s'agit de la généralisation des coordonnées polaires pour les mouvements en trois dimensions. Un point est repéré par les variables $\boxed{r,\theta,z}$, comme indiqué sur la figure ci dessous. Il s'agit du même z qu'en coordonnées cartésiennes. $r \in [0,\infty[$, $\theta \in [0,2\pi[$ et $z \in]-\infty,\infty[$. On travaille dans la base orthonormée directe $\boxed{P,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_z}}$. Il s'agit encore d'une **base locale** car elle est attachée au point mobile P. Les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ varient dans le temps, leur dérivée respective n'est donc pas nulle. Par contre $\overrightarrow{u_z}$ est un vecteur constant, sa dérivée temporelle est nulle.



En notant que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP} = r\overrightarrow{u_R} + z\overrightarrow{u_z}$ et en utilisant la définition de $\vec{v}$ et de $\vec{a}$, on arrive facilement aux résultats suivants :

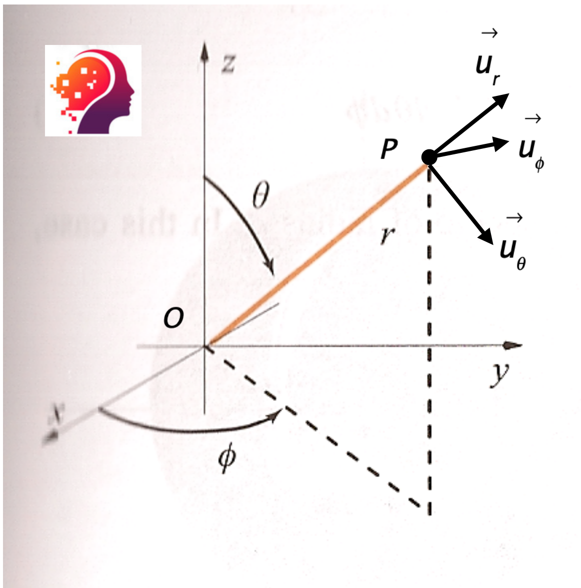
$$\vec{r} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$

4.7 - Les coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, un point est repéré par les variables $\boxed{r,\theta,\phi}$, comme indiqué sur la figure ci dessous. $r \in [0,\infty[$, $\theta \in [0,\pi[$ et $\phi \in [0,2\pi]$. On travaille dans la base orthonormée directe $\boxed{P,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\phi}}$. Il s'agit encore d'une **base locale.** Ainsi le vecteur position s'écrit simplement :

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{u_r}}$$

Les expressions des vecteurs vitesse et accélération sont plus compliquées mais ceci n'est pas au programme.



4.8 - Vecteur déplacement élémentaire

Soit un point P qui subit un déplacement élémentaire (infinitésimal) pour se retrouver en un point infiniment voisin P'. On appelle le vecteur déplacement élémentaire le vecteur $\overrightarrow{PP'}$ que l'on note $\overrightarrow{d\ell}$ (ou encore $\overrightarrow{dOP}$).

Remarque : En science, on note souvent dX une petite variation (variation infinitésimale) de la grandeur X et par ΔX une grande variation (variation finie) de la même grandeur (comme nous l'avons déjà vu).

✔ vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cartésienne

Pour passer du point P au point P', on effectue successivement un petit déplacement dx selon l'axe x, dy suivant l'axe y et dz suivant l'axe z. Ainsi, on peut écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{d\ell} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}}$$

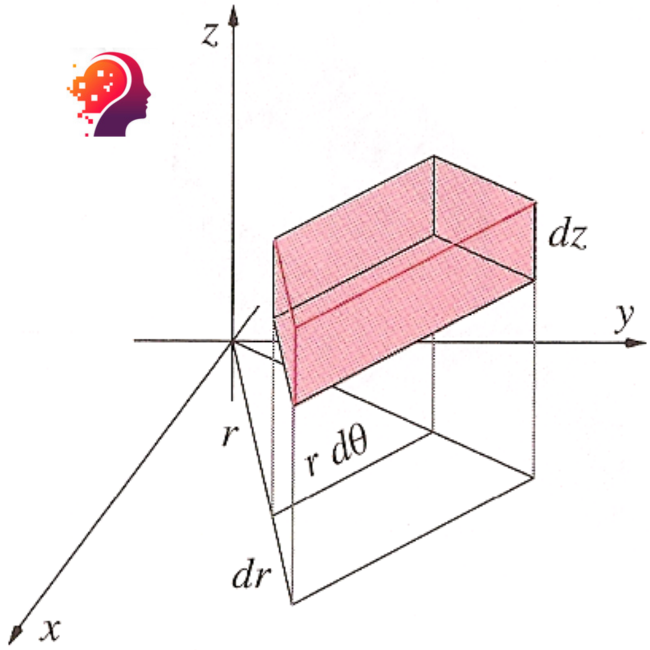
Il faut noter que le vecteur vitesse instantané s'écrit :

$$\vec{v} = \overrightarrow{PP'}/dt = \overrightarrow{d\ell}/dt = dx/dt\,\vec{i} + dy\,/dt\,\vec{j} + dz/dt\,\vec{k}\,.$$

✔ <u>Vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cylindrique</u>

On considère la figure ci-contre. On obtient facilement :

$$\overrightarrow{d\ell} = dr\,\overrightarrow{u_r} + r\,d\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + dz\,\overrightarrow{u_z}$$

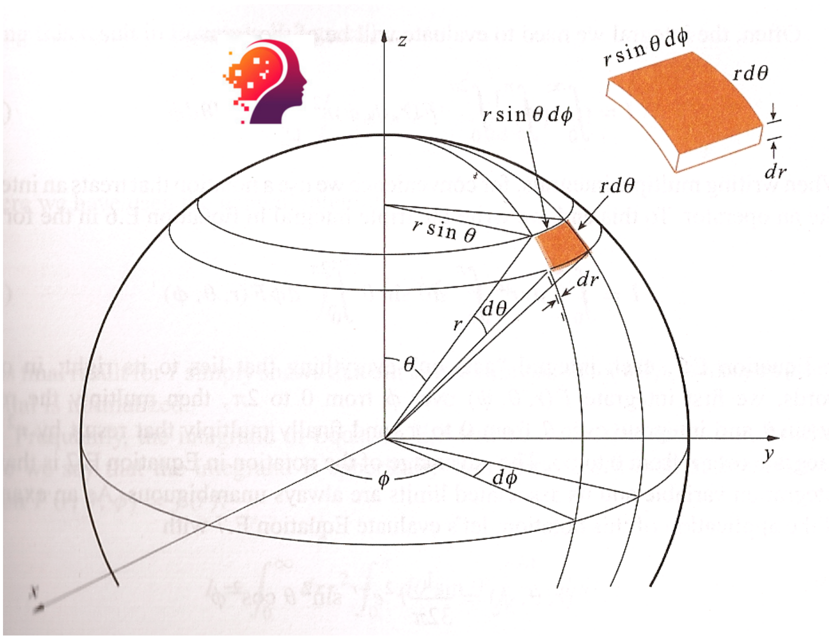


✔ <u>Vecteur déplacement élémentaire en coordonnées sphériques</u>

On considère la figure ci-contre.

On obtient facilement :

$$\overrightarrow{d\ell} = dr\,\overrightarrow{u_r} + r\,d\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\overrightarrow{u_\phi}$$



<u>Attention</u>

- Ne pas confondre le r des coordonnées cylindriques et le r des coordonnées sphériques, même notation mais désignent des grandeurs différentes.
- On utilise aussi la lettre grecque minuscule phi φ à la place de la lettre grecque majuscule phi ϕ.
- Les mathématiens inversent les notations ϕ et θ (à moins que ce ne soit les physiciens ☺)

V – EXEMPLE DE MOUVEMENTS « USUELS » IMPORTANTS

Dans cette partie, nous allons supposer connue l'accélération $\vec{a}$ à laquelle est soumis notre point matériel. Nous verrons l'origine de cette accélération dans le cours de dynamique. Mais vous savez déjà, d'après le principe fondamental de la dynamique, que l'accélération à laquelle est soumis un corps physique est reliée aux forces qu'il subit par $\vec{a} = \dfrac{\sum \vec{F}}{m}$.

Notre programme, dans cette partie, consiste à trouver la trajectoire du point matériel à partir de $\vec{a}$ en procédant par intégrations successives et grâce à la connaissance des conditions initiales (CI). Le schéma suivant résume la procédure :

$$\vec{a}(t):\begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a_r(t) \\ a_\theta(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} \underset{\text{DERIVATION}}{\overset{\text{INTEGRATION + CI}}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t):\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} v_r(t) \\ v_\theta(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \underset{\text{DERIVATION}}{\overset{\text{INTEGRATION + CI}}{\rightleftarrows}} \overrightarrow{OP}(t):\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

5.1 - Mouvement rectiligne à accélération constante $\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \overrightarrow{cst}}$

Il s'agit d'un exemple important. En effet, si l'on néglige la résistance de l'air, tous les corps physiques à la surface de la Terre sont soumis à une accélération constante $g \approx 9{,}81$ m.s^{-2} (il s'agit de la chute libre). Cette accélération a pour origine, comme nous le verrons dans le cours de dynamique, l'attraction gravitationnelle entre la terre et l'objet considéré.

L'exemple suivant peut correspondre au lâcher d'une pierre du haut de la tour de Pise en Italie (fameuse expérience de Galilée).

➪ Hypothèse : $\boxed{\vec{a} = -g\vec{k}}$ avec l'axe (Oz) orienté suivant la verticale ascendante.

➪ Conditions initiales (CI) : A $t = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, $z = z_0$ et $v_{x0} = v_{y0} = v_{z0} = 0$.

➪ Intégrations :

Exercice d'application 2
Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ pour le mouvement rectiligne.

La vitesse croît linéairement avec le temps alors que **la position croît quadratiquement avec le temps** (comme son carré). Les figures ci-dessous illustrent la chute libre.

FIGURE 2–26 Multiflash photograph of a falling apple, at equal time intervals. The apple falls farther during each successive interval, which means it is accelerating.

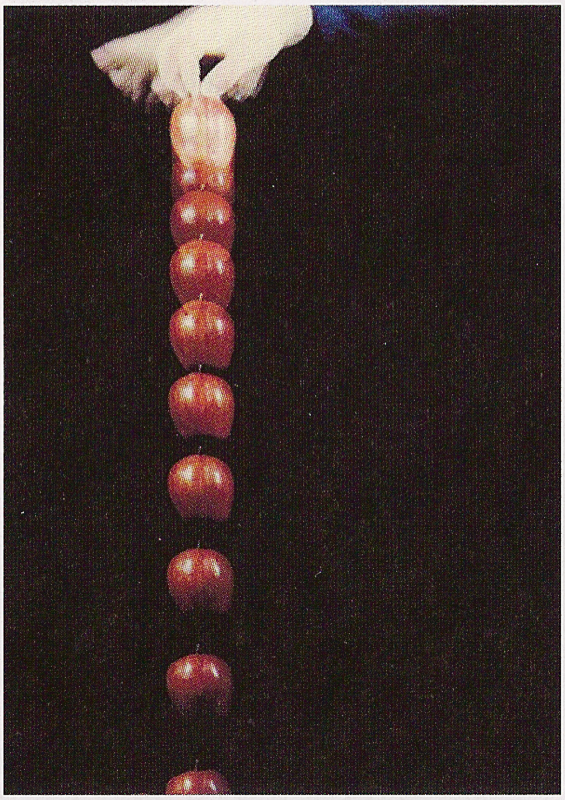
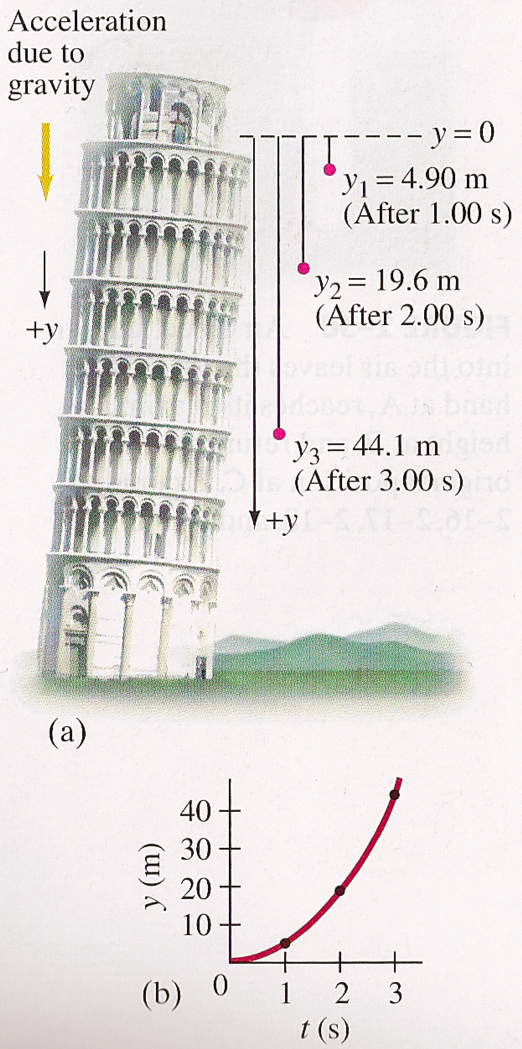
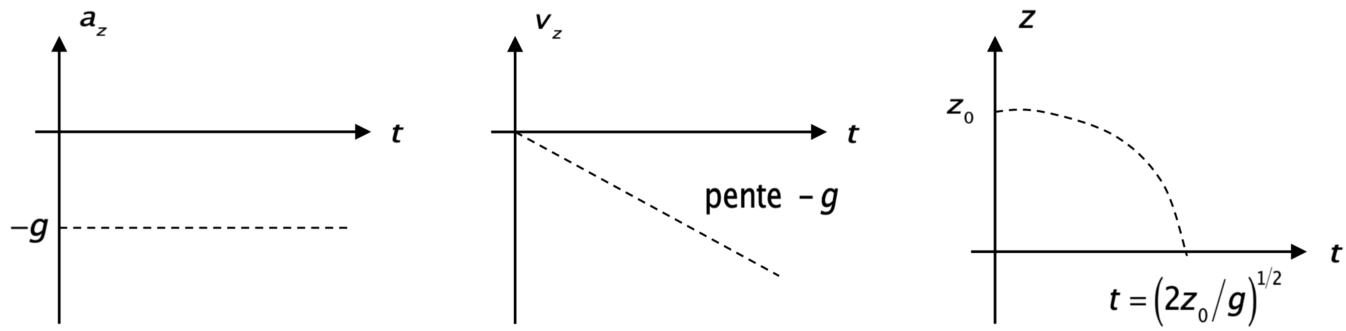


FIGURE 2–29 Example 2–14. (a) An object dropped from a tower falls with progressively greater speed and covers greater distance with each successive second. (See also Fig. 2–26.) (b) Graph of y vs. t.



Les courbes ci-dessous représentent l'évolution de $a_z(t)$ (dans ce cas, c'est élémentaire), de $v_z(t)$ et de $z(t)$.



5.2 - Mouvement circulaire (très important pour toute la suite du cours)

Il s'agit de l'étude d'un point matériel (par exemple un cheval de manège) qui décrit un cercle de **rayon constant** donné à vitesse angulaire $\omega \equiv \dot{\theta}$ quelconque, c'est-à-dire qui peut varier dans le temps (au démarrage du manège et à l'arrêt de ce dernier).

Il est grandement préférable de travailler en coordonnées polaires, donc dans la base locale $\left(P,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}\right)$.

a) Cas général, mouvement non uniforme $\Rightarrow$ $\boxed{r = cst \text{ et } \omega \equiv \dot{\theta} \text{ variable}}$

On reprend l'étude du mouvement en coordonnées polaires mais cette fois avec $r = cst$ ce qui implique $\dot{r} = 0$.

➪ Vecteur position : $\boxed{\vec{r} = r\overrightarrow{u_r}}$

➪ Vecteur vitesse : $\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = r\omega\overrightarrow{u_\theta}}$

Le vecteur vitesse est bien tangent à la trajectoire circulaire. On a pour la norme de la vitesse : $\boxed{v = r\omega}$

➪ Vecteur accélération : $\boxed{\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = -r\omega^2\overrightarrow{u_r} + r\dot{\omega}\overrightarrow{u_\theta}}$

b) Cas particulier, mouvement uniforme $\Rightarrow$ $\boxed{r = cst \text{ et } \omega \equiv \dot{\theta} = cste}$

On a cette fois $\omega \equiv \dot{\theta} = cste$ soit $\ddot{\theta} = 0$. Les expressions du vecteur position et du vecteur vitesse restent identiques au cas général précédent. Par contre l'expression du vecteur accélération change, $\vec{a}$ n'a plus de composante suivant $\overrightarrow{u_\theta}$ (composante tangentielle) mais seulement une composante suivant $\overrightarrow{u_r}$ (composante radiale ou centripète).

➪ Vecteur position : $\boxed{\vec{r} = r\overrightarrow{u_r}}$

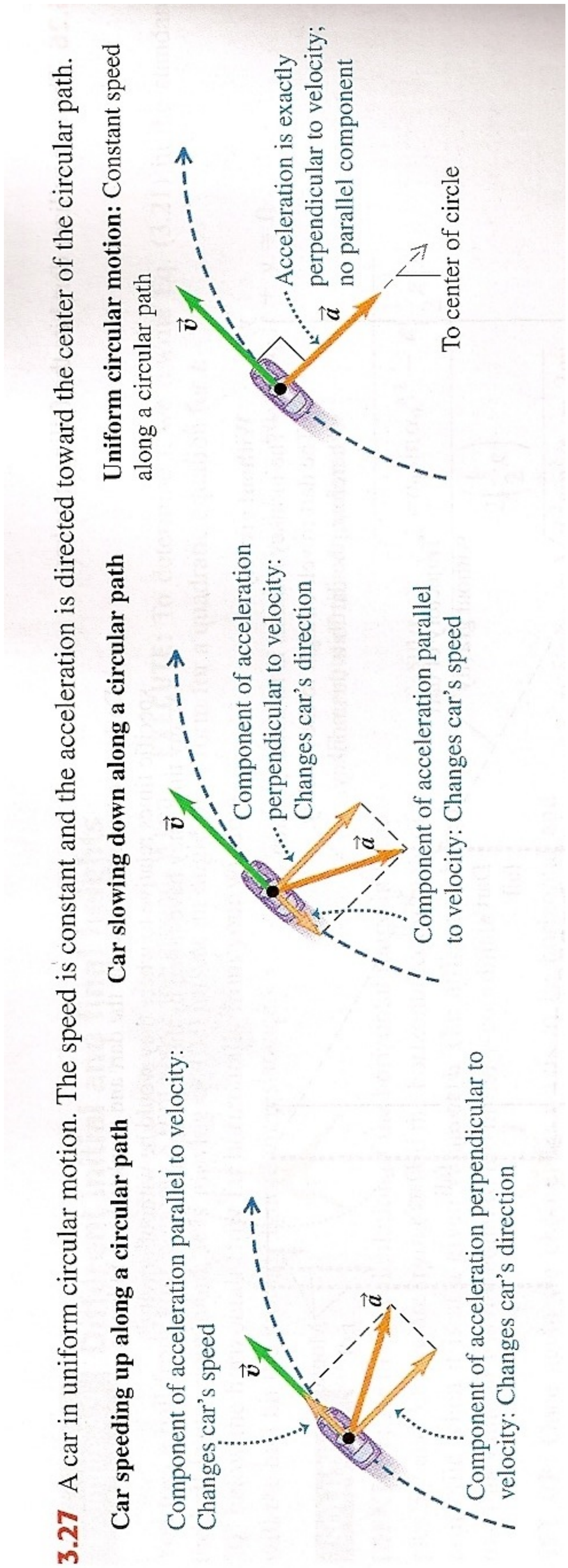
➪ Vecteur vitesse : $\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = r\omega\overrightarrow{u_\theta}}$

➪ Vecteur accélération : $\boxed{\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} = -r\omega^2\overrightarrow{u_r}}$. La norme du vecteur accélération vaut:

$$\boxed{a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}}$$

Les expressions de $\vec{v}$ et de $\vec{a}$ sont à bien connaître. On va les utiliser très souvent dans le cours de physique.

La figure ci-contre résume la situation pour le mouvement circulaire.



3.27 A car in uniform circular motion. The speed is constant and the acceleration is directed toward the center of the circular path.

VI – INTRODUCTION AU MOUVEMENT DES SOLIDES

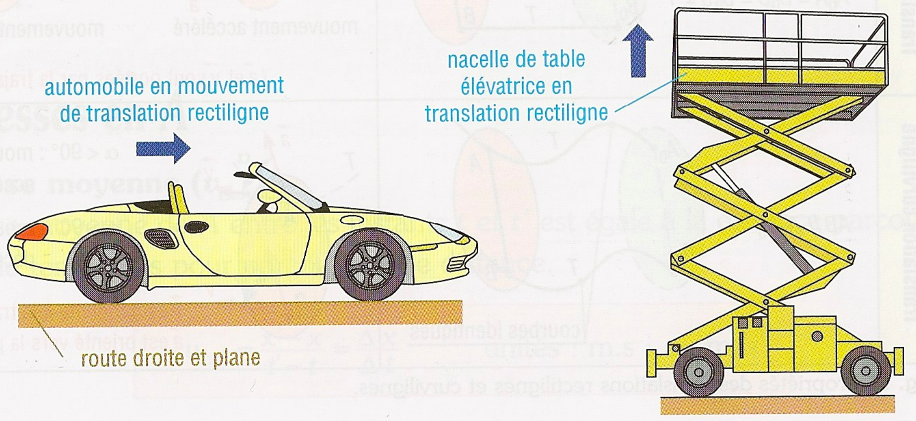
6.1 - Translation d'un solide

a) Généralités

D'une manière générale, lorsqu'un solide est en translation, chaque ligne de celui-ci se déplace parallèlement à sa position initiale au cours du temps. Aucune ligne ne subit la moindre rotation. Les lignes verticales restent verticales, les horizontales restent horizontales, etc., pendant toute la durée du mouvement, quelles que soient les vitesses et les accélérations. Par exemple, les lignes horizontales de la carrosserie d'une automobile en mouvement sur une route horizontale droite vérifient cette propriété. Le mouvement est appelé translation rectiligne et chaque point du véhicule suit une ligne trajectoire droite dans le sens du mouvement.

Dans les mouvements de translations curvilignes, si l'orientation de chaque ligne du solide est encore fixe (pas de rotation), les trajectoires des points ne sont plus des droites parallèles.

Remarque : en cinématique plane, il suffira de montrer qu'une seule droite du solide en mouvement vérifie la propriété précédente de parallélisme pour affirmer qu'il y a translation. Dans l'espace, deux droites non parallèles seront nécessaires pour la démonstration.



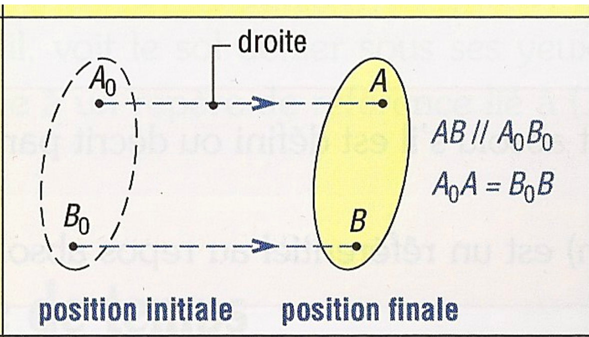
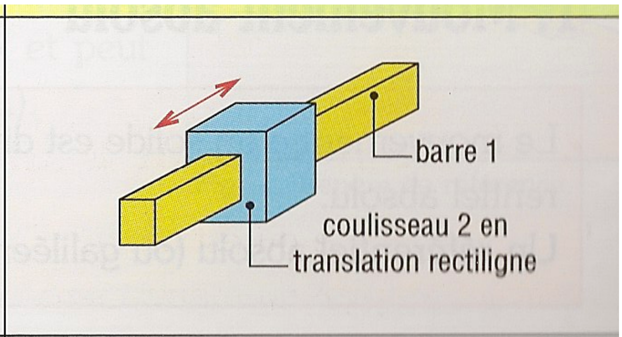
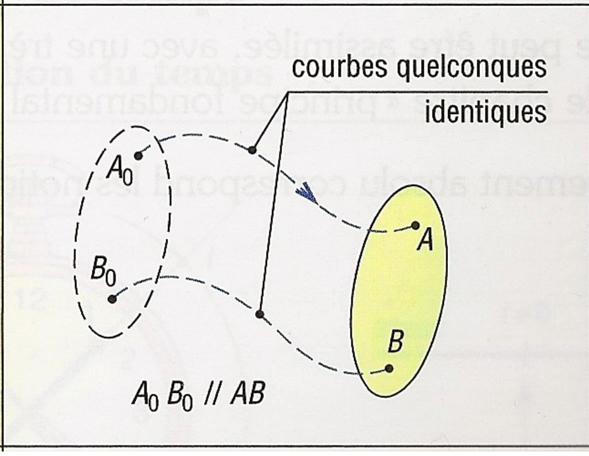
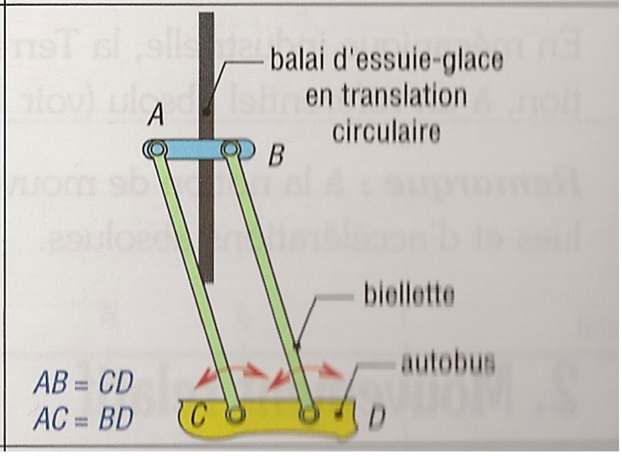
b) 2 types de translation

Un solide se déplace en translation si n'importe quelle ligne (AB) de celui-ci reste constamment parallèle à sa position initiale au cours du mouvement. À tout instant, il n'y a aucune rotation de AB.

Remarque : dans l'espace, deux lignes non parallèles seront nécessaires pour définir une translation.

Translation rectiligne : tous les points du solide se déplacent suivant des lignes parallèles entre elles.

Translation curviligne : les points du solide se déplacent suivant des courbes géométriques identiques ou superposables.

Translation rectiligne	 	
Translation curviligne	 	

<u>c) Propriétés</u>

– Tous les points du solide en translation ont des trajectoires identiques (courbes géométriques superposables) : $T = T_A = T_B = \ldots$

– Tous les points du solide ont même vitesse $\vec{v}$: $\vec{v} = \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B} = \ldots$

– Tous les points du solide ont même accélération $\vec{a}$: $\vec{a} = \overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_B} = \ldots$

– Le mouvement de translation d'un solide est complètement défini par le mouvement de l'un quelconque de ses points.

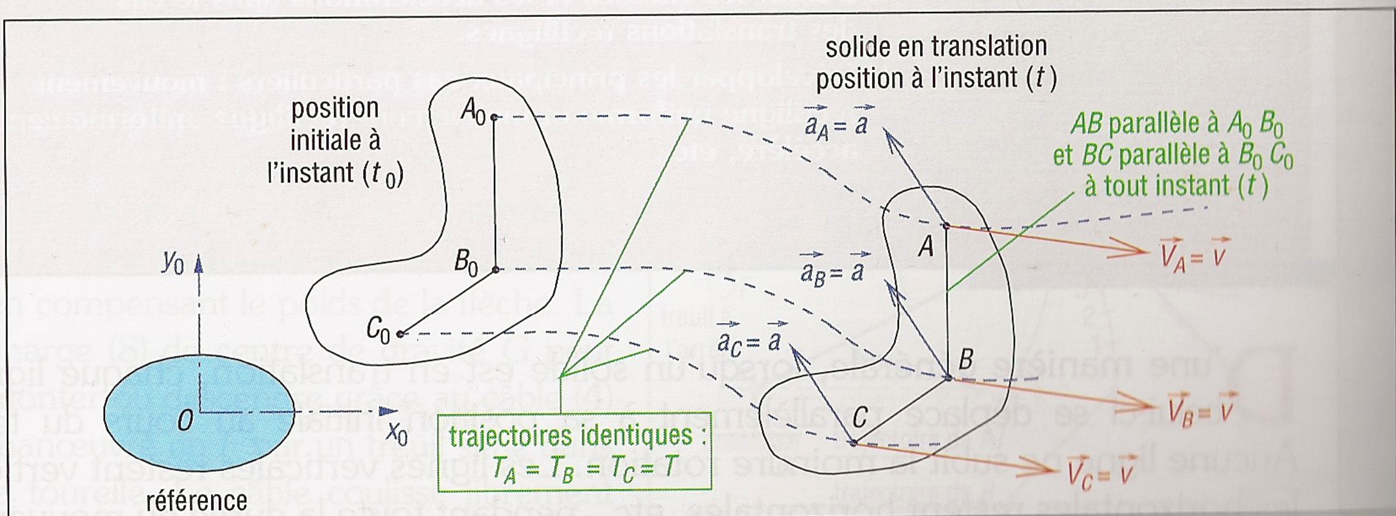


Fig. 1. Propriétés cinématiques (trajectoires, vitesses, accélérations…) des solides en translation.

(Les figures des parties 6.1, 6.2 et 6.3 sont extraites du <u>Guide de mécanique</u> de Jean-Louis Fanchon, éditions Nathan, 2008)

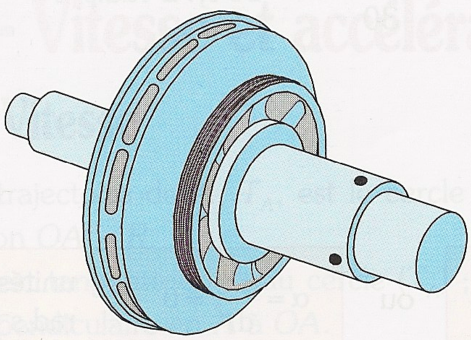
6.2 - Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

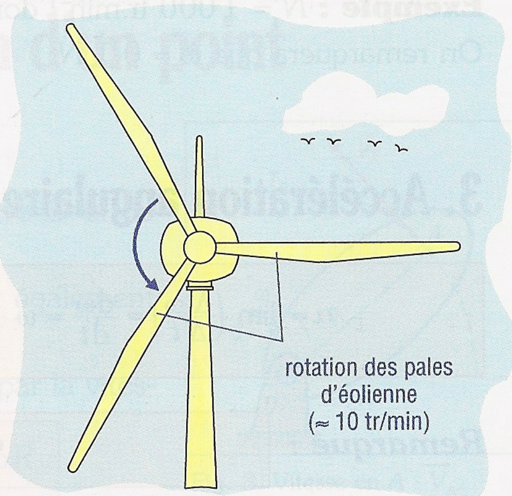
a) Généralités

Dans ce chapitre nous nous limiterons aux rotations d'axe fixe. Celles-ci sont de très loin les plus répandues dans le monde des sciences et technologies industrielles.

Les exemples de solides en mouvement de rotation d'axe fixe sont très nombreux qu'il s'agisse d'arbres de moteurs de toute nature (électrique, thermique…), d'arbres de turbines, de composants de machines (engrenages, courroies, poulies…), etc.

La connaissance des caractéristiques (angles, vitesses, accélérations) liées à ces mouvements sont nécessaires aux techniciens et ingénieurs pour comprendre, maîtriser, diagnostiquer ou concevoir les systèmes qui les utilisent. Le domaine des très grandes vitesses de rotation (usinage…) en plein développement en est une des illustrations.

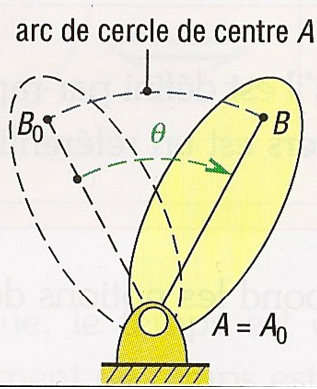

rouets de turbopompe à hydrogène du moteur d'Ariane 5 (110 000 tr/min)

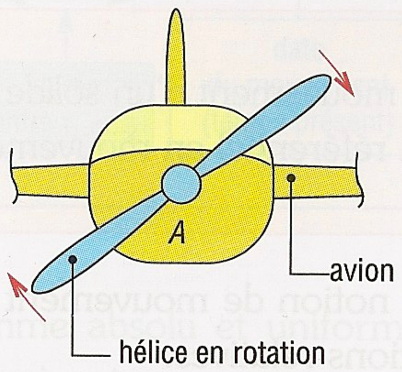

rotation des pales d'éolienne ($\approx$ 10 tr/min)

b) Propriétés

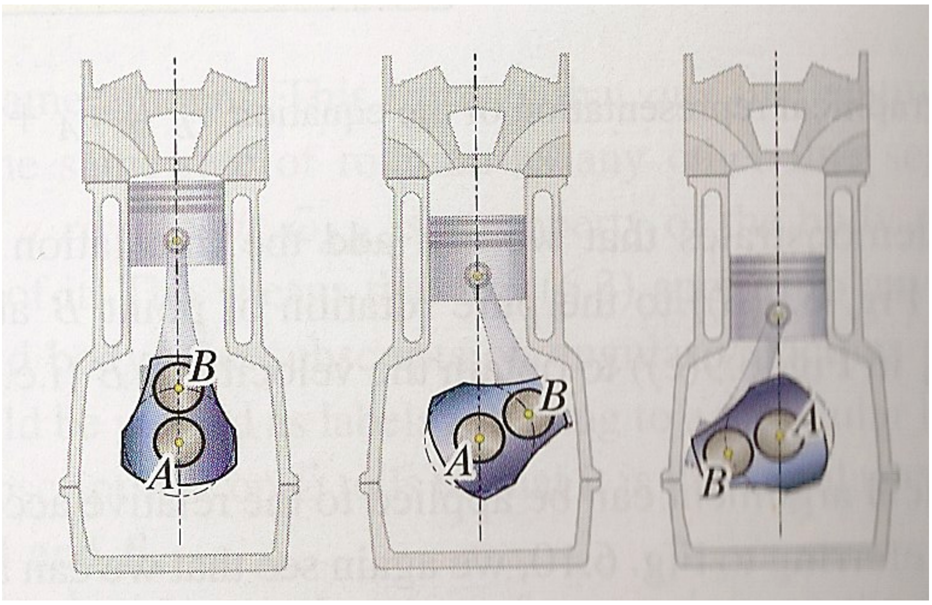
Le solide tourne ou est animé d'un mouvement angulaire autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement.
Les points du solide décrivent des cercles ou des circonférences centrés sur l'axe.
Toutes les lignes ou droites du solide tournent du même angle θ à chaque instant considéré.

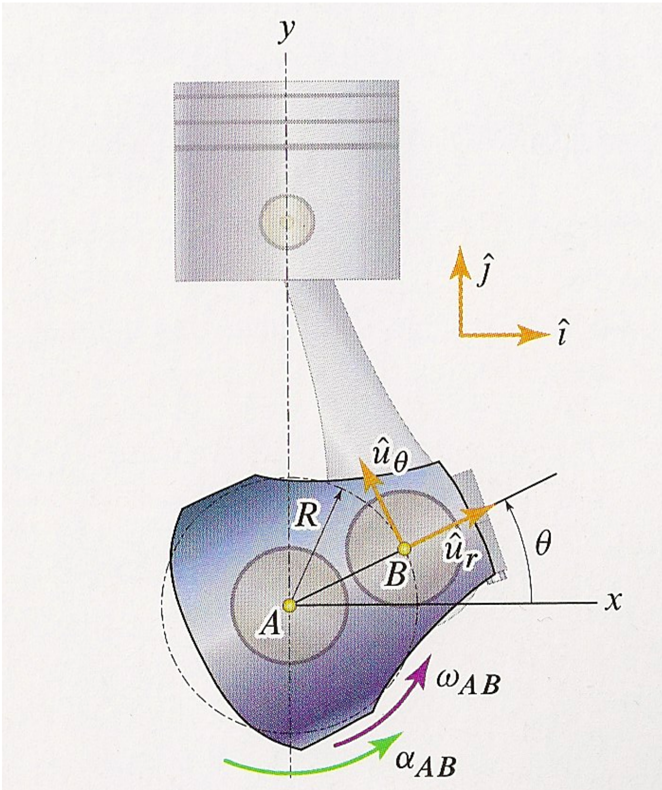
Rotation (d'axe fixe)





c) Vitesse d'un point du solide





On considère le vilbrequin d'un moteur à explosion (type automobile). Ce dernier effectue un mouvement de rotation autour de l'axe fixe qui passe par A et qui traverse la page à vitesse angulaire ω (qui peu varier). Un point B quelconque du vilbrequin, distant de $r = AB$ de A, effectue un mouvement de rotation plan. Il est donc facile d'exprimer la vitesse du point B en coordonnées polaires d'après notre étude du mouvement circulaire :

$$\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = r\omega\overrightarrow{u_\theta}}$$

Plus le point est loin de l'axe, plus la norme de sa vitesse est important !