ROTATION ET THEOREME DU MOMENT CINETIQUE

«Je suis né sans rien savoir et je n'ai eu qu'un peu de temps pour y remédier de-ci de-là.»

Richard Feynman

PRELUDE

L'accélération, les forces, ces notions sont suffisantes pour étudier des problèmes qui ne nécessitent que la mécanique classique. Cependant, comme on l'a vu, de nouveaux concepts ont été introduits au cours de l'élaboration de la mécanique, en particulier l'énergie mécanique, à cause du **caractère conservatif** de ces grandeurs (c'est-à-dire que ces grandeurs gardent une valeur constante au cours de l'évolution du système physique au cours du temps).

Les trois grandeurs physiques conservatives suivantes jouent un rôle central en mécanique :

$\rightarrow \vec{p} =$ **quantité de mouvement** ($= m\vec{v}$ en mécanique classique), grandeur vectorielle.
$\rightarrow E =$ **l'énergie**, grandeur scalaire.
$\rightarrow \vec{L} =$ **le moment cinétique** (défini dans ce chapitre), grandeur vectorielle.

La validité des principes de conservation de $\vec{p}$, $\vec{L}$, E s'étend à toute la physique ce qui fait que l'on retrouve ces grandeurs aussi bien en physique quantique, qu'en relativité etc…Par contre, la notion première qu'est la force en mécanique classique a disparu dans les nouvelles théories physiques du $\text{XX}^{\text{ème}}$ siècle (physique quantique…).

Le **théorème de Noether** (mathématicienne allemande 1882-1935) permet de relier la conservation de $\vec{p}$, $\vec{L}$, E aux invariances des lois de la physique :

$\rightarrow$ La conservation de $\vec{p}$ est une conséquence de l'invariance des lois de la physique par translation spatiale, c'est-à-dire de l'homogénéité de l'espace.

$\rightarrow$ La conservation de $\vec{L}$ est une conséquence de l'invariance des lois de la physique par rotation, c'est-à-dire de l'isotropie de l'espace.

$\rightarrow$ La conservation de E est une conséquence de l'invariance des lois de la physique par translation temporelle, c'est-à-dire de l'homogénéité du temps.

Dans tout ce chapitre, comme dans tout le cours de mécanique de PTSI, nous travaillons dans un référentiel supposé galiléen.

I – Moment d'une force

Le moment d'une force (torque en anglais), par rapport à un point ou un axe, donne une mesure de la tendance qu'à une force à provoquer la rotation d'un corps par rapport à un point ou un axe (cf. figure ci-dessous).

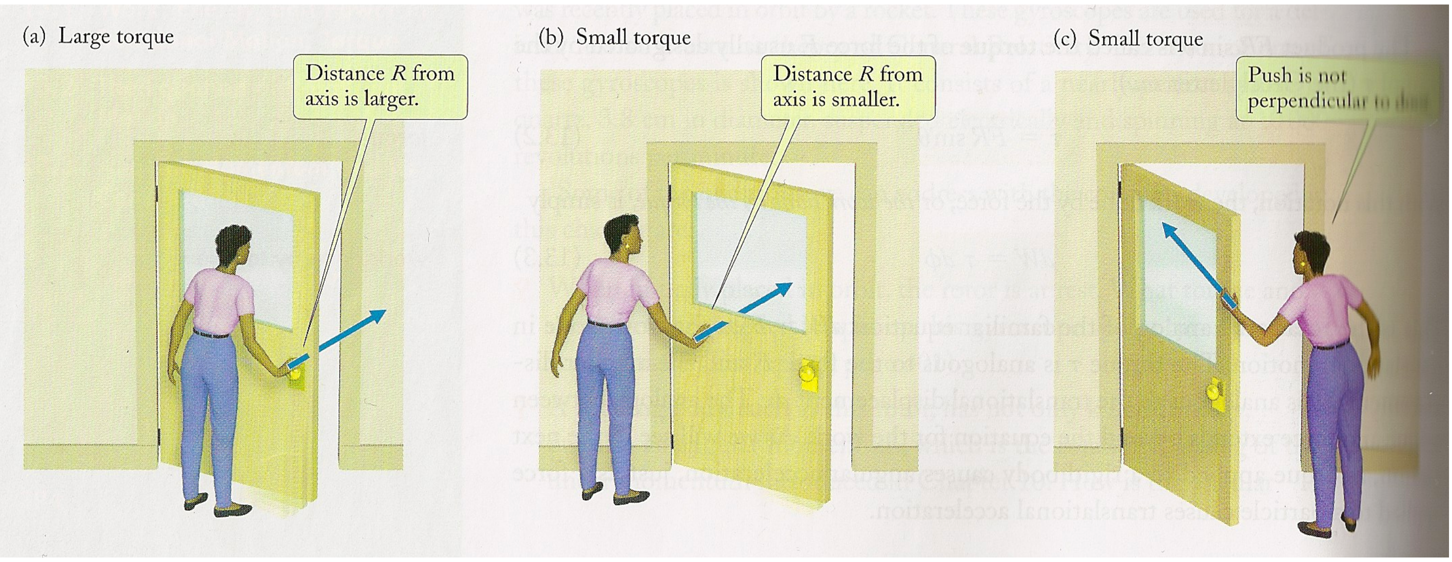
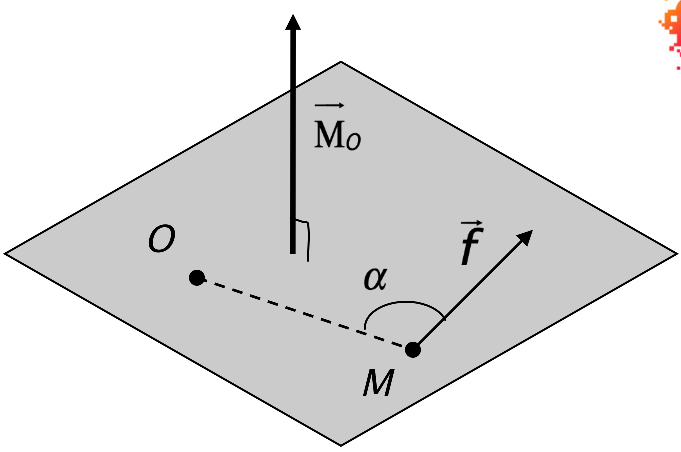


FIGURE 13.2 (a) A push against the door far from the hinge produces a large angular acceleration. (b) The same push near the hinge produces a small angular acceleration. (c) A push against the door at a small angle also produces a small angular acceleration.

1.1 Moment en un point

On considère une force $\vec{f}$ qui s'applique en un point *M*.

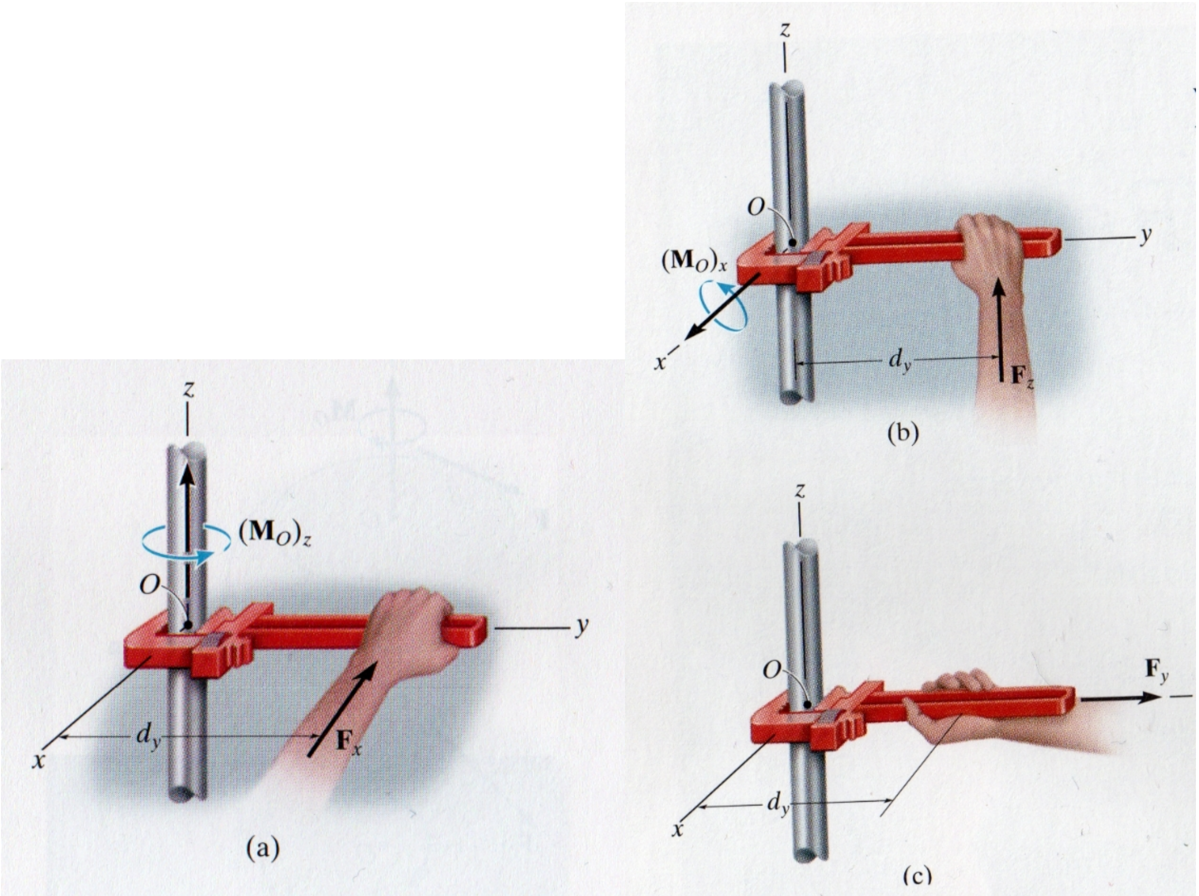


$$\overrightarrow{M_O} \equiv \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} \quad \text{(définition)}$$

Par définition $\overrightarrow{M_O}$ est le **moment de la force $\vec{f}$ par rapport au point O quelconque mais fixe dans le référentiel d'étude.** Il est d'usage de nommer le point par la lettre O mais ce n'est pas forcement l'origine du repère, vous pouvez donner le nom que vous souhaitez à ce point. Le moment d'une force est aussi parfois noté $\overrightarrow{\tau_O} \equiv \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$.

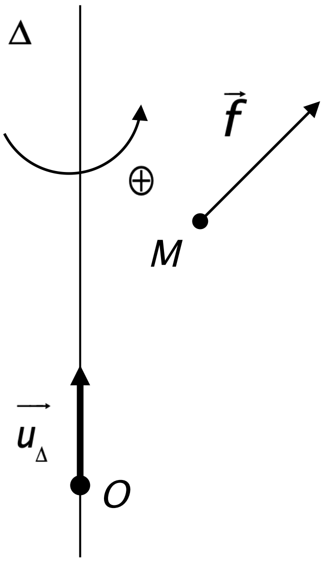
Il s'exprime en N.m et il s'agit d'une grandeur vectorielle. Il est perpendiculaire au plan contenant $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{f}$ par définition du produit vectoriel. Les vecteurs $\overrightarrow{OM}, \vec{f}$ et $\overrightarrow{M_O}$ forment un trièdre direct (règle du tire bouchon ou de la main droite). La norme de ce moment vaut $\boxed{\mathrm{M}_0 = OM \times f \times \sin\alpha}$. Si O appartient à la droite $\left(M,\vec{f}\right)$, alors $\overrightarrow{\mathrm{M}_0} = \vec{0}$.

<u>Figure a,b,c</u> : Effet d'un moment d'une force.



1.2 Moment par rapport à un axe

a) Cas général



Δ est orienté suivant $\overrightarrow{u_\Delta}$
(règle du tir bouchon)

$$\boxed{\mathrm{M}_\Delta \equiv \overrightarrow{\mathrm{M}_O} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$

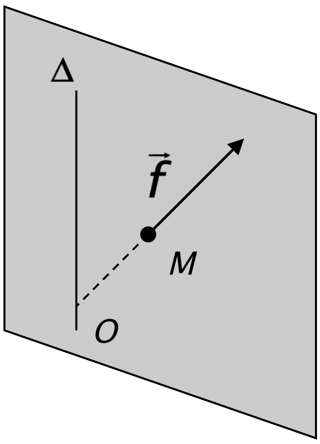
Par définition M_Δ est le **moment de la force** $\vec{f}$ **par rapport à l'axe** Δ **orienté**. Il s'exprime en N.m^2 et il s'agit d'une grandeur scalaire.

$$\boxed{\forall O \in \Delta,\ \mathrm{M}_\Delta \text{ est identique}}$$

En effet :

$$\mathrm{M}_\Delta = \overrightarrow{\mathrm{M}_O} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \left(\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right) \wedge \vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$
$$= \underbrace{\left(\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}_{=0} + \overrightarrow{\mathrm{M}_{O'}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{\mathrm{M}_{O'}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

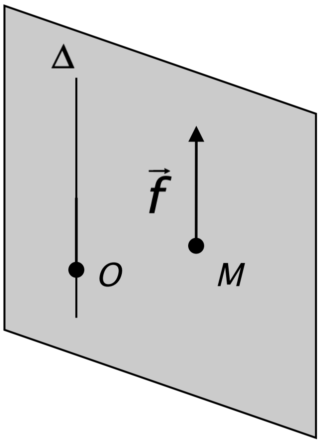
b) Force passant par l'axe



La droite $\left(M,\vec{f}\right)$ coupe l'axe Δ en un point O.

$\overrightarrow{\mathrm{M}_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$ donc $\boxed{\mathrm{M}_\Delta = 0}$. Ceci est vrai pour tout point O appartenant à Δ.

c) Force parallèle à l'axe

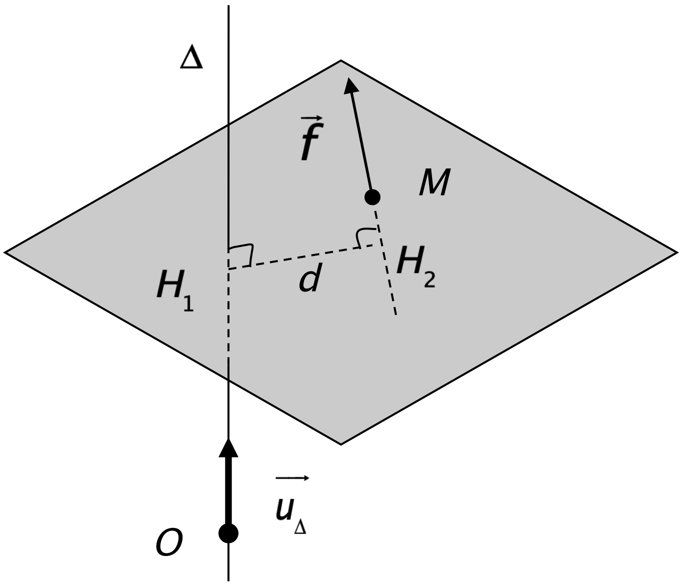


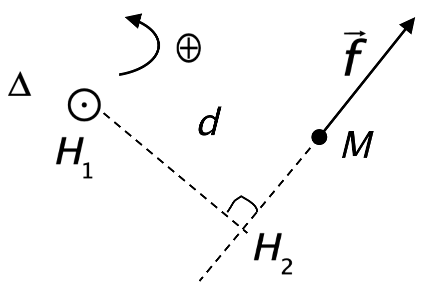
$\overrightarrow{\mathrm{M}_O} \perp \overrightarrow{OM}$ et $\vec{f}$, comme $\vec{f} \parallel \Delta$ alors $\overrightarrow{\mathrm{M}_O} \perp \Delta$ ainsi:

$$\boxed{\mathrm{M}_\Delta \equiv \overrightarrow{\mathrm{M}_O} \bullet \overrightarrow{u_\Delta} = 0}$$

Il s'agit ici d'un cas particulier du cas b) pour lequel le point O est rejeté à l'infini.

d) Force perpendiculaire à l'axe, notion de bras de levier





$$\mathrm{M}_\Delta = \left(\overrightarrow{H_1M} \wedge \vec{f}\right) \bullet \overrightarrow{u_\Delta} = \left(\left(\overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2M}\right) \wedge \vec{f}\right) \bullet \overrightarrow{u_\Delta} = \left(\overrightarrow{H_1H_2} \wedge \vec{f}\right) \bullet \overrightarrow{u_\Delta} = d \times f$$

BRAS DE LEVIER

$$\mathrm{M}_\Delta = f\,d \text{ avec } H_1H_2 = d = \textbf{le bras de levier}.$$

$\mathrm{M}_\Delta > 0$ si M_Δ fait tourner *M* autour de Δ dans le sens positif (règle du tire bouchon).

$\mathrm{M}_\Delta < 0$ si M_Δ fait tourner *M* autour de Δ dans le sens négatif.

1.3 Notion de couple

Le conducteur de la Ferrari de la figure ci-contre exerce sur le volant de la voiture deux forces telles que $\overrightarrow{F_C} + \overrightarrow{F_E} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{F_C} = -\overrightarrow{F_E}$. Cependant, le volant va tourner car le moment global de ces deux forces par rapport à l'axe de rotation du volant n'est pas nul : $\mathrm{M}_\Delta = 2rF$ où r est le rayon du volant.

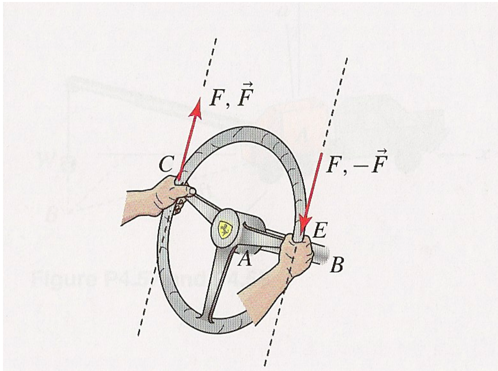


Figure 4.17
The steering wheel in the Ferrari 250 GTO (see the discussion beginning on p. 203), where the driver uses two hands to apply two forces of equal magnitude and opposite direction to the steering wheel. Such a force system is defined to be a *couple*.

On appelle **COUPLE** une action exercée sur un système telle que la force résultante soit nulle mais dont le moment résultant n'est pas nul.

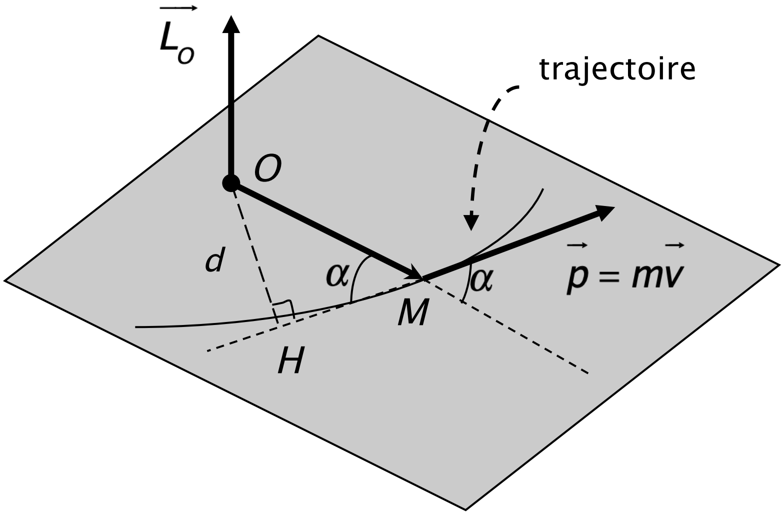
II – Moment cinétique d'un point matériel

2.1 Moment cinétique par rapport à un point fixe

Soit un point *O* fixe quelconque dans un référentiel galiléen et un point ponctuel (ou particule) *M* de masse *m* animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans ce même référentiel.

$$\overrightarrow{L_O} \equiv \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \text{ (définition)}$$

$\overrightarrow{L_O}$ **est le moment cinétique du point *M* par rapport au point *O*.** La norme de ce dernier s'exprime en $\mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$.

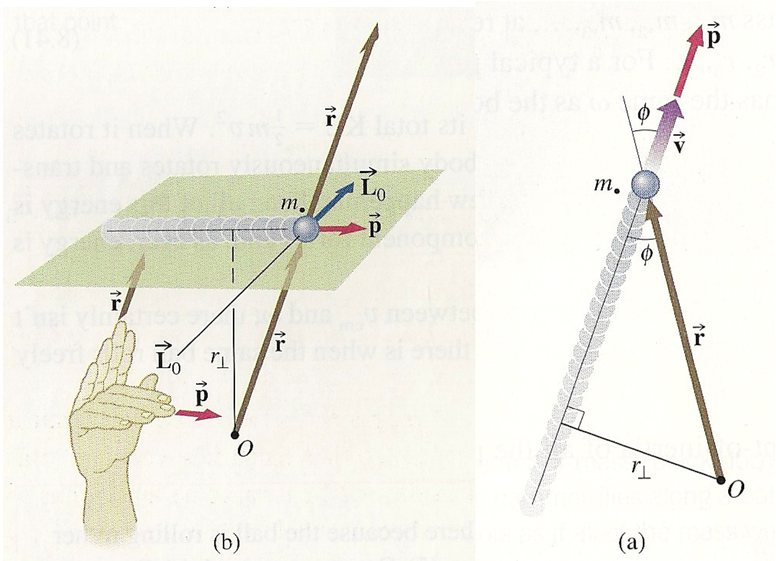


$\vec{L_O} \perp$ à $\vec{OM}$ et $\vec{p}$ donc à $\vec{v}$.

$L_O = mv \times OM \times \sin\alpha$ donc :

$$\boxed{L_O = mv\,d}$$

Figure 8.45 (*a*) A particle of mass *m* has an angular momentum L_0 with respect to point *O* equal to $r_\perp m v$.
(*b*) The direction of $\vec{\mathbf{L}}_0$ is perpendicular to the plane of $\vec{\mathbf{r}}$ and $\vec{\mathbf{p}}$ such that $\vec{\mathbf{L}}_0 = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$. Slide **r** along itself until it's tail-to-tail with $\vec{\mathbf{p}}$ and then form $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$. Determine the smallest angle between $\vec{\mathbf{r}}$ and $\vec{\mathbf{p}}$ by placing your fingers along **r** so they close naturally into $\vec{\mathbf{p}}$. Your thumb will point in the direction of $\vec{\mathbf{L}}_0$.



<u>2.2 Moment cinétique par rapport à un axe</u>

Par analogie avec ce que l'on a fait pour le moment d'une force, on définit le moment cinétique par rapport à un axe :

$$\boxed{L_\Delta \equiv \vec{L_O} \bullet \vec{u_\Delta}}$$

Nous allons montrer que $\vec{L_O} \bullet \vec{u_\Delta}$ ne dépend pas du point *O* qui appartient à l'axe Δ. Soit *O'* appartenant à Δ. $\vec{L_O} \bullet \vec{u_\Delta} - \vec{L_{O'}} \bullet \vec{u_\Delta} = \vec{u_\Delta} \bullet \left(\vec{L_O} - \vec{L_{O'}}\right) = \vec{u_\Delta} \bullet \left(-\underbrace{\vec{O'O} \wedge \vec{p}}_{\perp \text{ à } \vec{O'O}}\right) = 0$

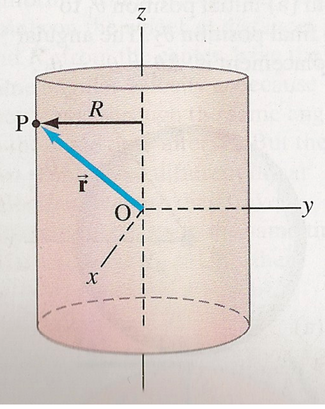
Ainsi $L_\Delta = \vec{L_O} \bullet \vec{u_\Delta}$ est la projection de $\vec{L_O}$ sur l'axe Δ qui est indépendant du point *O* appartenant à cet axe.

III – Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

3.1 Rappels : Variables cinématiques et vecteur rotation

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe (cf. figure ci-contre).

FIGURE 10–2 Showing the distinction between $\vec{r}$ (the position vector) and R (the distance from the rotation axis) for a point P on the edge of a cylinder rotating about the z axis.



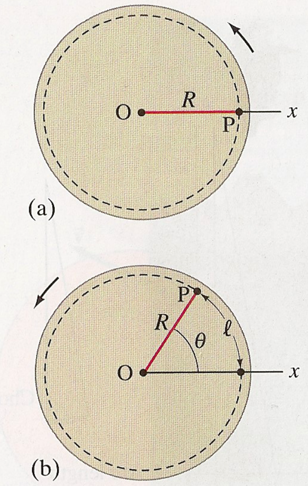


FIGURE 10–1 Looking at a wheel that is rotating counterclockwise about an axis through the wheel's center at O (axis perpendicular to the page). Each point, such as point P, moves in a circular path; ℓ is the distance P travels as the wheel rotates through the angle θ.

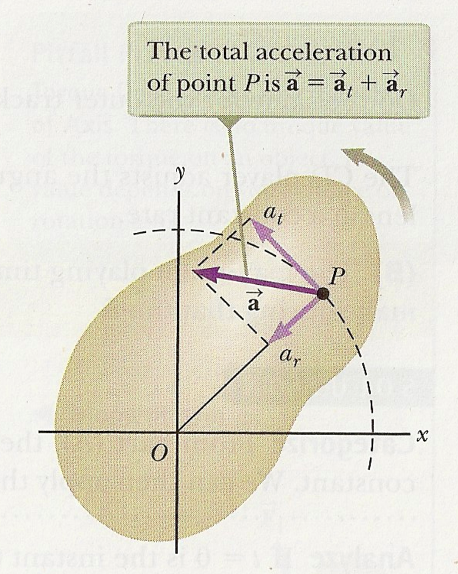


Figure 10.5 As a rigid object rotates about a fixed axis (the z axis) through O, the point P experiences a tangential component of translational acceleration a_t and a radial component of translational acceleration a_r.

$\boxed{\text{angle de rotation: } \theta \equiv \dfrac{\ell}{R}}$

$\boxed{\text{vitesse angulaire: } \omega \equiv \dfrac{d\theta}{dt}}$

$\boxed{\text{accélération angulaire: } \alpha \equiv \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}}$

$\boxed{\text{vitesse linéaire: } v \equiv R\omega}$

$\boxed{\text{accélération linéaire tangentielle: } a_t = R\alpha}$

$\boxed{\text{accélération linéaire radiale: } a_r = R\omega^2 = v^2/R}$

3.2 Moment cinétique et moment d'inertie

On considère le solide de la figure ci-contre en rotation autour d'un axe fixe Δ que l'on choisit comme l'axe (Oz). Pour chaque particule de l'objet situé en $\vec{r_i}$: $\vec{L_i} = \vec{r_i} \wedge \vec{p_i}$. L'angle entre $\vec{r_i}$ et $\vec{p_i}$ vaut 90°. On note ϕ l'angle entre $\vec{L_i}$ et l'axe de rotation. Ainsi la projection de $\vec{L_i}$ sur (Oz) vaut **quel que soit le point** $O \in$ l'axe : $L_{iz} = r_i \times p_i \times \cos\phi = r_i \times m_i v_i \times \cos\phi$.

De plus comme $v_i = R\omega_i$ et $R_i = r_i \cos\phi =$ la distance à l'axe de rotation, on obtient : $L_{iz} = \left(m_i R_i^2\right)\omega$.

Le solide est la somme de toutes les particules qui le constituent, cela donne pour l'ensemble du solide : $L_z = \sum_i L_{iz} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega = J_\Delta \omega$.

On a introduit **le MOMENT D'INERTIE du solide en rotation par rapport à l'axe fixe :**

$$\boxed{J_\Delta \equiv \sum_i m_i R_i^2}$$

Le moment d'inertie d'un solide en rotation **caractérise la distribution de masse de ce solide par rapport à l'axe de rotation en question**. Il n'est donc pas unique pour un même solide suivant l'axe de rotation d'étude.

Plus J_Δ sera important, plus l'inertie (l'opposition, la résistance au changement) vis-à-vis de la rotation sera importante. J_Δ joue le même rôle dans les mouvements de rotation que la masse dans les mouvements de translation.

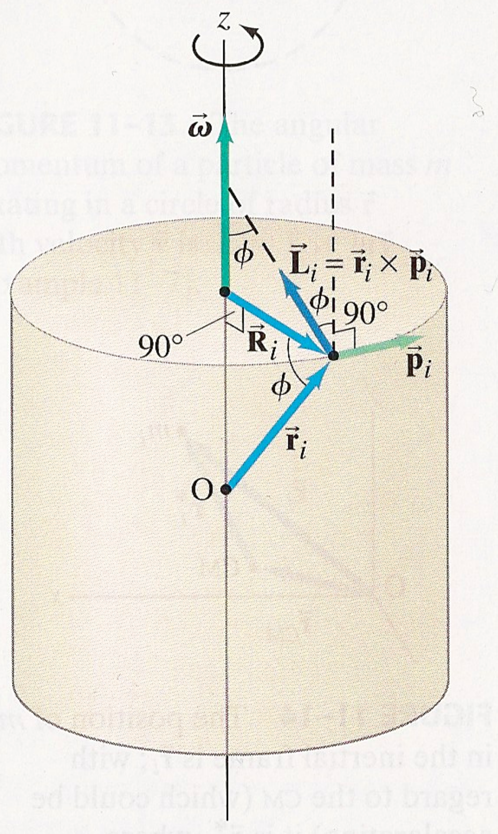


FIGURE 11–15 Calculating $L_\omega = L_z = \Sigma L_{iz}$. Note that $\vec{\mathbf{L}}_i$ is perpendicular to $\vec{\mathbf{r}}_i$, and $\vec{\mathbf{R}}_i$ is perpendicular to the z axis, so the three angles marked ϕ are equal.

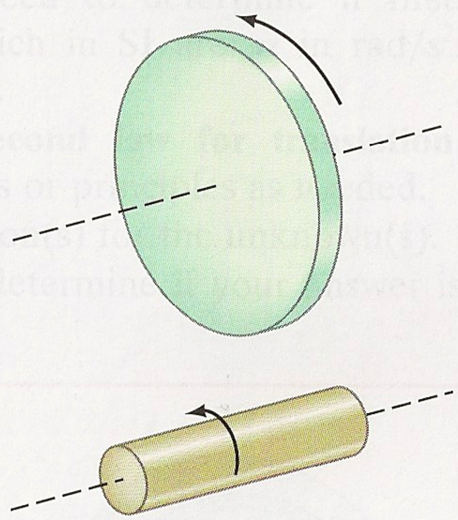
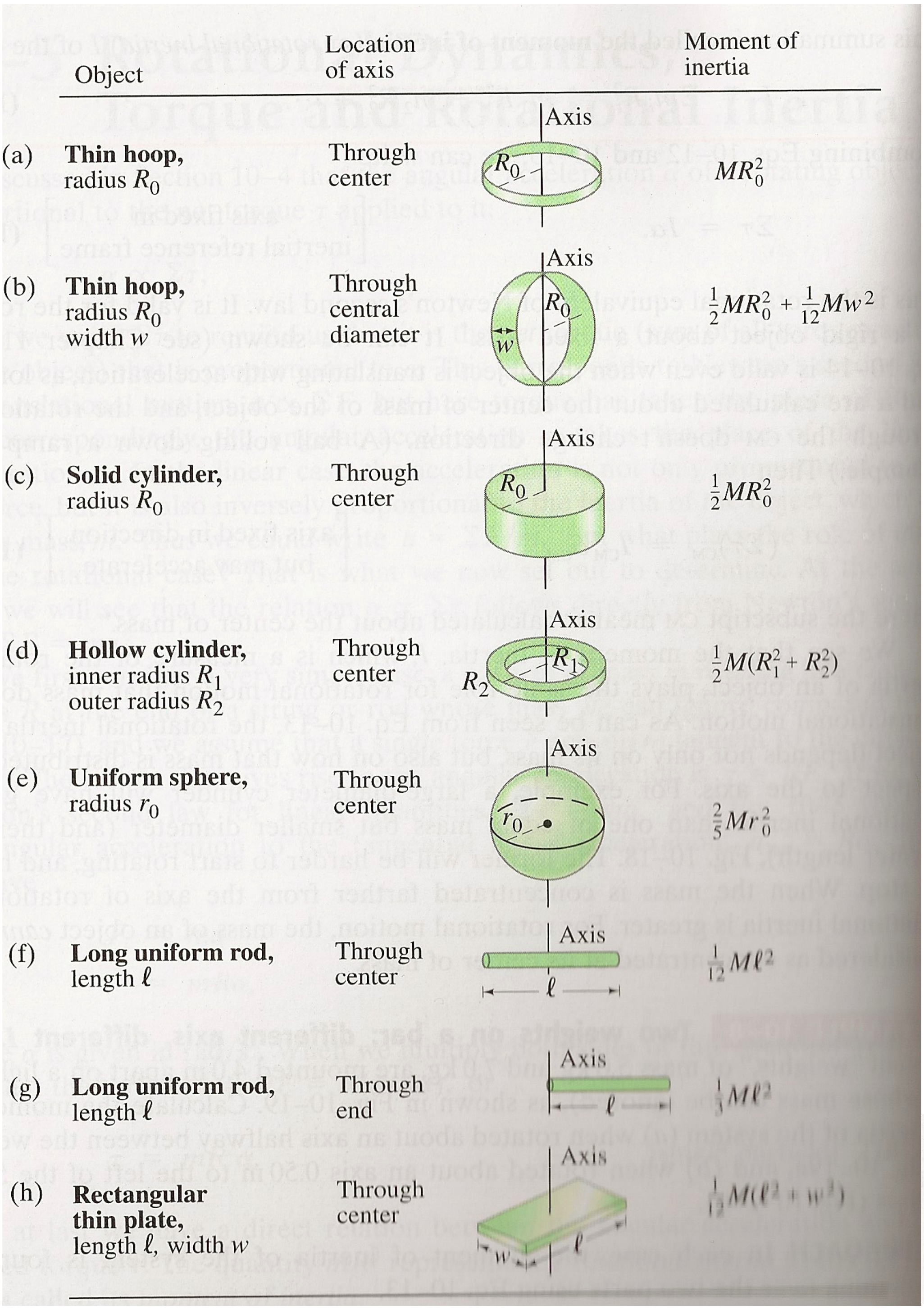


FIGURE 10–18 A large-diameter cylinder has greater rotational inertia than one of equal mass but smaller diameter.

J_Δ n'est pas facile à calculer dans le cas général (vous n'avez pas à le faire dans le cadre du programme), cela est beaucoup plus facile si l'axe de rotation est un axe de symétrie de l'objet. La figure ci-dessous donne des valeurs de moments d'inertie dans les cas usuels



Object	Location of axis	Moment of inertia
(a) **Thin hoop,** radius R_0	Through center	MR_0^2
(b) **Thin hoop,** radius R_0 width w	Through central diameter	$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
(c) **Solid cylinder,** radius R_0	Through center	$\frac{1}{2}MR_0^2$
(d) **Hollow cylinder,** inner radius R_1 outer radius R_2	Through center	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
(e) **Uniform sphere,** radius r_0	Through center	$\frac{2}{5}Mr_0^2$
(f) **Long uniform rod,** length ℓ	Through center	$\frac{1}{12}M\ell^2$
(g) **Long uniform rod,** length ℓ	Through end	$\frac{1}{3}M\ell^2$
(h) **Rectangular thin plate,** length ℓ, width w	Through center	$\frac{1}{12}M(\ell^2 + w^2)$

FIGURE 10–20 Moments of inertia for various objects of uniform composition. [We use R for radial distance from an axis, and r for distance from a point (only in e, the sphere), as discussed in Fig. 10–2.]

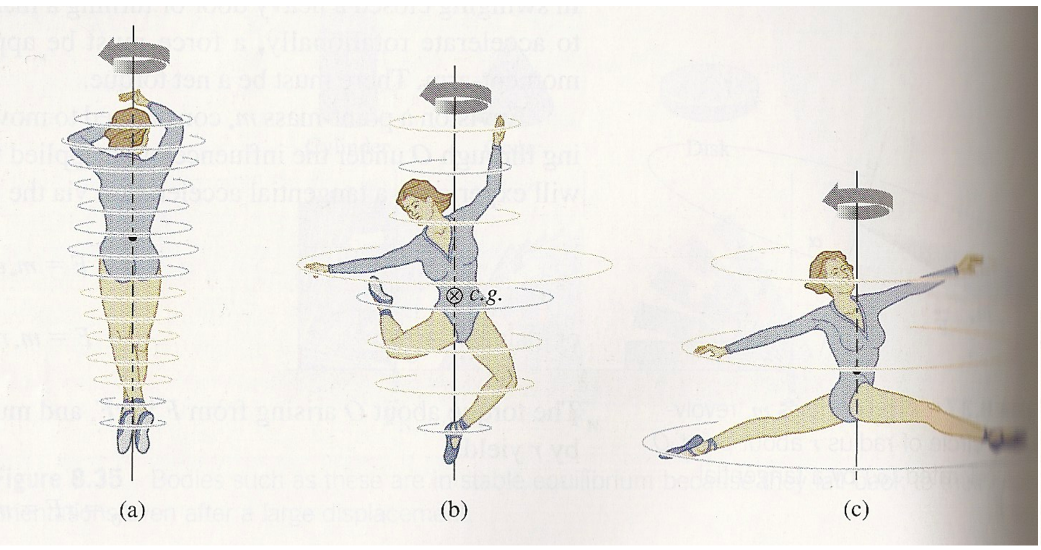


Figure 8.38 With the limbs drawn in near the spin axis as in (*a*), the moment-of-inertia is comparatively small. With bent knees I increases, as in (*b*), and reaches a maximum with arms and legs extended perpendicular to the axis (*c*).

On

Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ

$$L_\Delta = J_\Delta \omega$$

$$J_\Delta \equiv \sum_i m_i R_i^2 = \text{moment d'inertie (définition)}$$

3.3 Liaison pivot

Si un solide possède un mouvement de rotation autour d'un axe, c'est que la plupart du temps, il existe un dispositif mécanique permettant au solide de rester lié à l'axe.

On appelle liaison pivot un mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un certain axe.

Cette liaison va exercer sur le solide **un couple de frottement dont en général le moment résultant par rapport à l'axe de rotation** M_Δ **n'est pas nul**.

On dit que la ***liaison pivot est parfaite*** si $\mathrm{M}_\Delta = 0$.

On sera souvent dans cette situation.

IV – Théorème du moment cinétique

4.1 Cas d'un point matériel

a) Par rapport à un point fixe, loi vectorielle

Soit ***O*** **un point fixe** (hypothèse essentielle) quelconque (pas forcément l'origine du repère) dans un **référentiel galiléen** $\Re_g$ (autre hypothèse essentielle). On considère un point matériel *M* de masse *m* de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ dans $\Re_g$ soumis à la résultante des forces $\vec{F} = \sum \vec{f}$.

$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}\right) = m\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v} + m\overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$, on utilise la seconde loi de Newton, $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{f} = \vec{F}$

: $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \underbrace{m\vec{v} \wedge \vec{v}}_{=0} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ ce qui donne finalement le théorème du moment cinétique :

Théorème du moment cinétique par rapport à point fixe pour un point matériel: loi vectorielle

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathrm{M}_O}\left(\vec{f}\right)$$

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point M, par rapport à un point fixe dans un référentiel galiléen, est égale à la somme des moments, par rapport au même point fixe, auquel il est soumis.

Notons que le moment de la somme des forces est égal à la somme des moments de chaque force. En effet, $\overrightarrow{\mathrm{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{f} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \sum \overrightarrow{\mathrm{M}_O}(\vec{f})$.

Remarques importantes :

→ Le théorème du moment cinétique, avec le théorème de l'énergie mécanique ou plus généralement la loi de conservation de l'énergie (1er principe de la thermodynamique) et le principe fondamental de la dynamique, est la troisième grande loi de la mécanique. Il s'agit d'une équation vectorielle, il donne donc trois équations scalaires comme le principe fondamental de la dynamique.

→ Le théorème du moment cinétique est très utilisé dans l'étude des systèmes en rotation. On peut dire que le théorème du moment cinétique est l'équivalent du principe fondamental de la dynamique pour les systèmes en rotation.

→ Le théorème du moment cinétique est très utile et très riche d'un point de vue conceptuel dans la description des systèmes à forces centrales conservatives (étude dans le prochain chapitre) car dans ce cas, il y a conservation de $\overrightarrow{L_O}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{0}$.

→ Nous démontrerons la deuxième loi de Kepler à partir de la conservation du moment cinétique, en effet la force de gravité est centrale. Par contre, la première loi et la troisième loi dépendent uniquement du fait que la force de gravité est inversement proportionnelle au carré de la distance comme nous le verrons.

b) Par rapport à un axe fixe, loi scalaire

Soit Δ un axe fixe, on projette simplement le théorème du moment cinétique sur l'axe Δ qui contient le point O : $d\overrightarrow{L_O}/dt.\overrightarrow{u_\Delta} = \sum \overrightarrow{\mathrm{M}_O}(\vec{f}).\overrightarrow{u_\Delta}$ donc :

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum \mathrm{M}_\Delta}$$

Rappelons que L_Δ et M_Δ sont indépendants du point O appartenant à l'axe de projection. Cette forme est très utile dans la description d'un système en rotation autour d'un axe Δ et c'est cette dernière, sous sa forme généralisée, que nous allons utiliser pour décrire les solides en rotation.

4.2 Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Nous allons considérons le solide comme un ensemble de particules (dont les distances sont fixes car le solide est indéformable). Le moment cinétique total de l'ensemble est la somme vectorielle du moment cinétique de chaque particule : $\overrightarrow{L_O} = \sum_i \overrightarrow{L_{iO}}$.

Le moment total qui agit sur le système est la somme des moments des forces dont l'origine est extérieure au système + la somme des moments des forces dont l'origine est intérieure au système (interactions entre les particules du système) : $\overrightarrow{\mathrm{M}_O} = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{M}_{iO}^{ext}} + \sum_i \overrightarrow{\mathrm{M}_{iO}^{\mathrm{int}}}$.

Mais on peut montrer, en utilisant la troisième loi de Newton (ce résultat est encore valable dans le cas d'un système déformable), $\sum_i \overrightarrow{\mathrm{M}_{iO}^{\mathrm{int}}} = 0$. Ainsi en dérivant et en appliquant le théorème du moment cinétique pour chaque particule, on obtient : $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \frac{d\overrightarrow{L_{iO}}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{M}_{iO}^{ext}} = \sum \overrightarrow{\mathrm{M}_O^{ext}}$, pour simplifier la notation.

Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ que l'on choisit comme l'axe (Oz), on peut projeter la relation précédente sur l'axe de rotation :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}.\overrightarrow{u_\Delta} = \sum \overrightarrow{\mathrm{M}_O^{ext}}.\overrightarrow{u_\Delta} \Leftrightarrow \frac{dL_\Delta}{dt} = \sum \mathrm{M}_\Delta^{ext} \Leftrightarrow J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum \mathrm{M}_\Delta^{ext}$$

où J_Δ est le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ, M_Δ^{ext} le moment total des forces extérieures projeté sur l'axe Δ et ω la vitesse de rotation du solide. C'est sous cette forme, dite scalaire, que nous retiendrons le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation :

Théorème du moment cinétique scalaire: solide en rotation

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum \mathrm{M}_\Delta^{ext}$$

Exercice d'application 1 : Tige en rotation

Une tige uniforme de longueur L et de masse M est attachée à l'une de ses extrémités par une liaison pivot sans frottement et est libre de tourner autour de ce pivot. La tige est lâchée sans vitesse initiale à partir d'une position horizontale (cf. figure).

a) Quelles sont l'accélération angulaire initiale de la tige et l'accélération linéaire initiale de l'extrémité droite de la tige ?

b) On place une pièce à l'extrémité droite de la tige et on la lâche. La pièce reste-t-elle en contact avec la tige ? Dans le cas d'une réponse négative, où faudrait-il placer la pièce pour qu'elle reste en contact ?

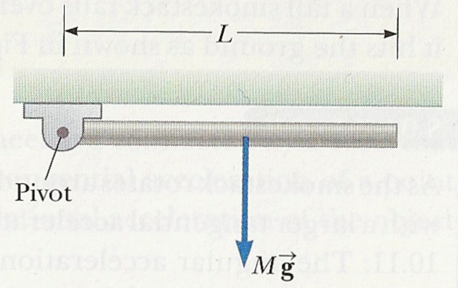


Figure 10.12 (Example 10.4) A rod is free to rotate around a pivot at the left end. The gravitational force on the rod acts at its center of mass.

Exercice d'application 2 : Bascule

Un père de masse m_f et sa fille de masse m_d se trouvent sur une bascule de masse M et de longueur L. La bascule peut pivoter sans frottement autour du pivot en O (cf. figure).

a) A un instant la bascule est en rotation à vitesse angulaire ω. Déterminer le moment cinétique de l'ensemble par rapport au pivot.

b) Déterminer une expression de l'accélération angulaire $\alpha \equiv \ddot{\theta}$ quand la bascule fait un angle θ avec l'horizontale.

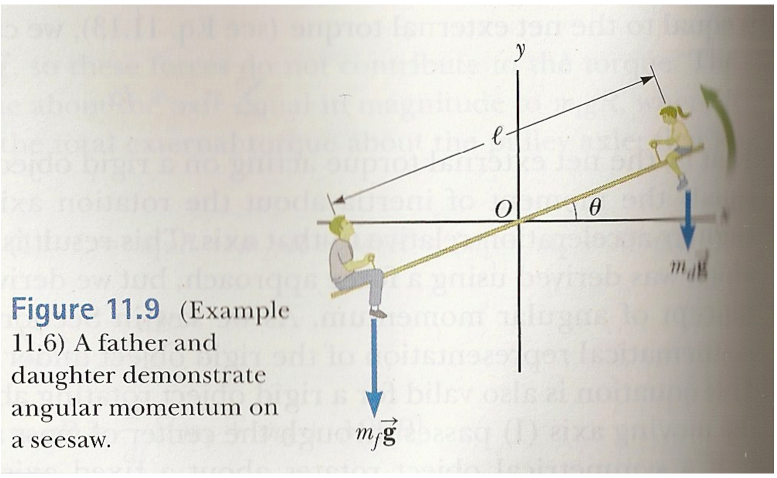


Figure 11.9 (Example 11.6) A father and daughter demonstrate angular momentum on a seesaw.

4.3 Conservation du moment cinétique

Le moment cinétique total d'un système (indéformable) est constant (il se conserve) si le moment total des forces extérieures qui agit sur ce dernier est nul, ce qui s'écrit :

$$\frac{d\overrightarrow{L_{tot}}}{dt} = \vec{0} \text{ si } \sum \overrightarrow{\mathrm{M}^{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \Delta\overrightarrow{L_{tot}} = 0 \text{ ou } \overrightarrow{L_{tot,i}} = \overrightarrow{L_{tot,f}}$$

Cette situation s'applique pour le cas **important des systèmes isolés**. Pour ces derniers, il y a aussi conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement :

$\Delta E_{syst} = 0$ si il n'y a aucun transfert d'énergie à travers la frontière du système.

$\Delta\overrightarrow{p_{tot}} = \vec{0}$ si aucune force extérieure n'agit sur le système

$\Delta\overrightarrow{L_{tot}} = 0$ si aucun moment extérieur n'agit sur le système

Exercice d'application 3 : Etoile à neutrons

Une étoile à une période de rotation de 30 jours par rapport à un axe qui passe par son centre. La période de rotation est l'intervalle de temps nécessaire pour un point de l'équateur de l'étoile pour faire une révolution complète autour de son axe de rotation. Après que l'étoile ait subi une explosion de type supernova, son cœur, de rayon $1{,}0 \times 10^4$ km s'effondre en une étoile à neutrons de rayon 3,0 km.

Déterminer, à partir d'hypothèses raisonnables, la période de rotation de l'étoile à neutrons.

V - Aspects énergétiques des solides en rotation autour d'un axe fixe

5.1 Energie cinétique de rotation

Nous allons de nouveau considérer le solide en rotation de la figure 11.15. Chaque particule du solide qui se trouve en $\vec{r}_i$ possède une vitesse $v_i = R_i\omega$ donc une énergie cinétique $m\left(R_i\omega\right)^2/2$. L'énergie cinétique du solide en rotation est la somme des énergies cinétiques de chacune des particules qui le constituent : $E_c = \sum_i m\left(R_i\omega\right)^2/2 = 1/2\sum_i\left(mR_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$ où nous avons introduit le moment d'inertie du solide. Nous retiendrons l'expression suivante de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe :

Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$$

Il y une forte analogie avec l'expression $mv^2/2$, le moment d'inertie joue le rôle de la masse et la vitesse linéaire est remplacée par la vitesse angulaire ! (cf. tableau d'analogie paragraphe suivant)

5.2 Puissance et travail

On considère le solide de la figure ci-contre en rotation autour d'un axe fixe Δ qui passe par son centre O. On souhaite calculer le travail de la force extérieure $\vec{F}$ qui agit sur un point du solide situé à la distance R de l'axe de rotation :

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\vec{F}\cdot\vec{d\ell} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}F_\perp R\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{M}_\Delta\,d\theta$$

où $\mathrm{M}_\Delta = F_\perp R$ est le moment de la force par rapport à l'axe de rotation fixe. On obtient ainsi l'expression du travail d'un moment qui fait tourner le solide de l'angle θ_1 à l'angle θ_2. La puissance de la force vaut donc

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathrm{M}_\Delta\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{M}_\Delta\omega\,.$$

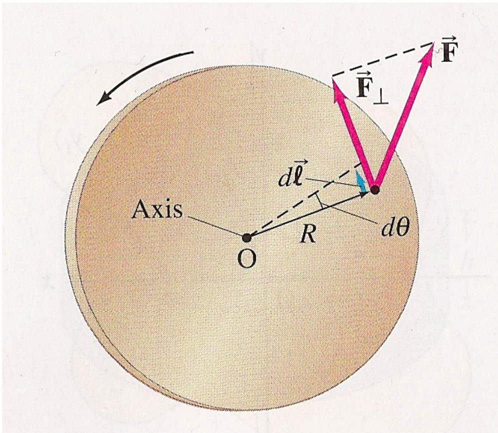


FIGURE 10–28 Calculating the work done by a torque acting on a rigid object rotating about a fixed axis.

On peut aussi retrouver l'équivalent du théorème de l'énergie cinétique pour ce solide en rotation en utilisant le théorème du moment cinétique:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{M}_\Delta \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(J_\Delta \frac{d\omega}{dt} \right) d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J_\Delta \frac{d\theta}{dt} d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J_\Delta \omega \, d\omega = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_\Delta \omega_1^2$$

On retrouve que **la variation d'énergie cinétique est due au travail des moments des forces extérieures**. On retiendra les résultats suivants :

solide en rotation autour d'un axe fixe

Travail du moment d'une force par rapport à un axe $\Rightarrow W \equiv \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{M}_\Delta \, d\theta$

Puissance $\Rightarrow P \equiv \mathrm{M}_\Delta \omega$

Théroème de l'énergie cinétique $\Rightarrow \sum W^{ext} = \underbrace{\frac{1}{2} J_\Delta \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_\Delta \omega_1^2}_{\Delta E_c}$

Remarques : Les principes énergétiques que l'on a rencontrés en mécanique du point sont toujours valables pour les solides indéformables. Cependant seules les forces extérieures interviennent, en effet on peut montrer pour les solides indéformables la nullité du travail et de la puissance des forces intérieures : $W_{\text{int}} = 0$ et $P_{\text{int}} = 0$. On écrira donc pour les solides indéformables : $\Rightarrow \begin{cases} \Delta E_c = \sum W^{ext} \text{ ou } dE_c/dt = \sum P^{ext} \\ \Delta E_m = \Delta\left(E_c + E_m\right) = \sum W^{ext,nc} \text{ ou } dE_m/dt = \sum P^{ext,nc} \end{cases}$

Exercice d'application 4 : Tige en rotation (suite)

On reprend la tige de l'exercice d'application 1. Déterminer la vitesse angulaire de la tige lorsqu'elle atteint la position verticale ainsi que la vitesse linéaire de l'extrémité de la tige pour cette même position.

VI - Analogie rotation-translation

Le tableau ci-dessous fait le parallèle entre le mouvement de translation et le mouvement de rotation pour le point matériel.

Translation	***Rotation***
Principe fondamental de la dynamique (cas général pour un système de particules): $\frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt} = \sum \overrightarrow{F^{ext}} \underbrace{=}_{\text{Si } M=\text{constante}} M\overrightarrow{a_{CM}}$	Théorème du moment cinétique : $\underbrace{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathrm{M}_O}}_{\text{point matériel/O, vectorielle}}$ ou $\underbrace{\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum \mathrm{M}_\Delta^{ext}}_{\text{solide}/\Delta\text{, scalaire}}$
Quantité de mouvement (cas général pour un système de particules): $\overrightarrow{P}_{CM} = \sum_i \overrightarrow{p_i}$	Moment cinétique : $\underbrace{\overrightarrow{L_O} \equiv \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{mv}}_{\text{point matériel/O}}$ ou $\underbrace{L_\Delta = J_\Delta \omega}_{\text{solide}/\Delta}$
Somme des forces : $\vec{F} = \sum \vec{f}$	Somme des moments : $\sum \overrightarrow{\mathrm{M}_O}$ ou $\sum \mathrm{M}_\Delta^{ext}$
$\vec{p}$ est constant (conservé) si $\sum \vec{f} = \vec{0}$	$\overrightarrow{L_O}$ (L_Δ) est constant (conservé) si $\sum \overrightarrow{\mathrm{M}_O} = \vec{0}$ $\left(\sum \mathrm{M}_\Delta^{ext} = 0\right)$
Masse : m	Moment d'inertie : J_Δ
Energie cinétique $= \frac{1}{2} m v^2$	Energie cinétique $= \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$
Travail: $W \equiv \int_1^2 \vec{F} \cdot \overrightarrow{d\ell}$	Travail: $W \equiv \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{M}_\Delta \, d\theta$
Puissance: $P \equiv \vec{F} \cdot \vec{v}$	Puissance: $P \equiv \mathrm{M}_\Delta \omega$
Théorème de l'énergie cinétique: $\sum W^{ext} + \underbrace{\sum W^{\text{int}}}_{\text{=0 si système indéformable}} = \Delta E_C \equiv \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$	Théorème de l'énergie cinétique: $\sum W^{ext} + \underbrace{\sum W^{\text{int}}}_{\text{=0 si système indéformable}} = \Delta E_c \equiv \frac{1}{2} J_\Delta \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_\Delta \omega_1^2$

VII – Application à l'étude du pendule pesant

7.1 Equation différentielle du mouvement

Exercice d'application 5 : Pendule pesant

Le solide de la figure ci-contre est libre de tourner autour d'un pivot parfait qui passe par le point O et qui est différent de son centre de masse CM. Si l'on écarte ce solide de sa position d'équilibre, il va se mettre à osciller à la manière d'un pendule simple. Cependant, il n'est plus possible de traiter ce solide comme un point matériel, c'est pour cela que l'on parle de **pendule pesant**.

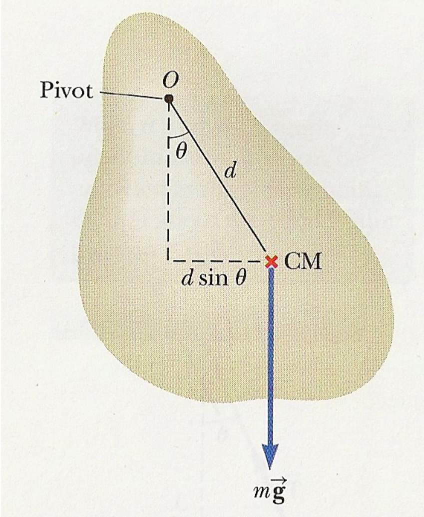


Figure 15.17 A physical pendulum pivoted at *O*.

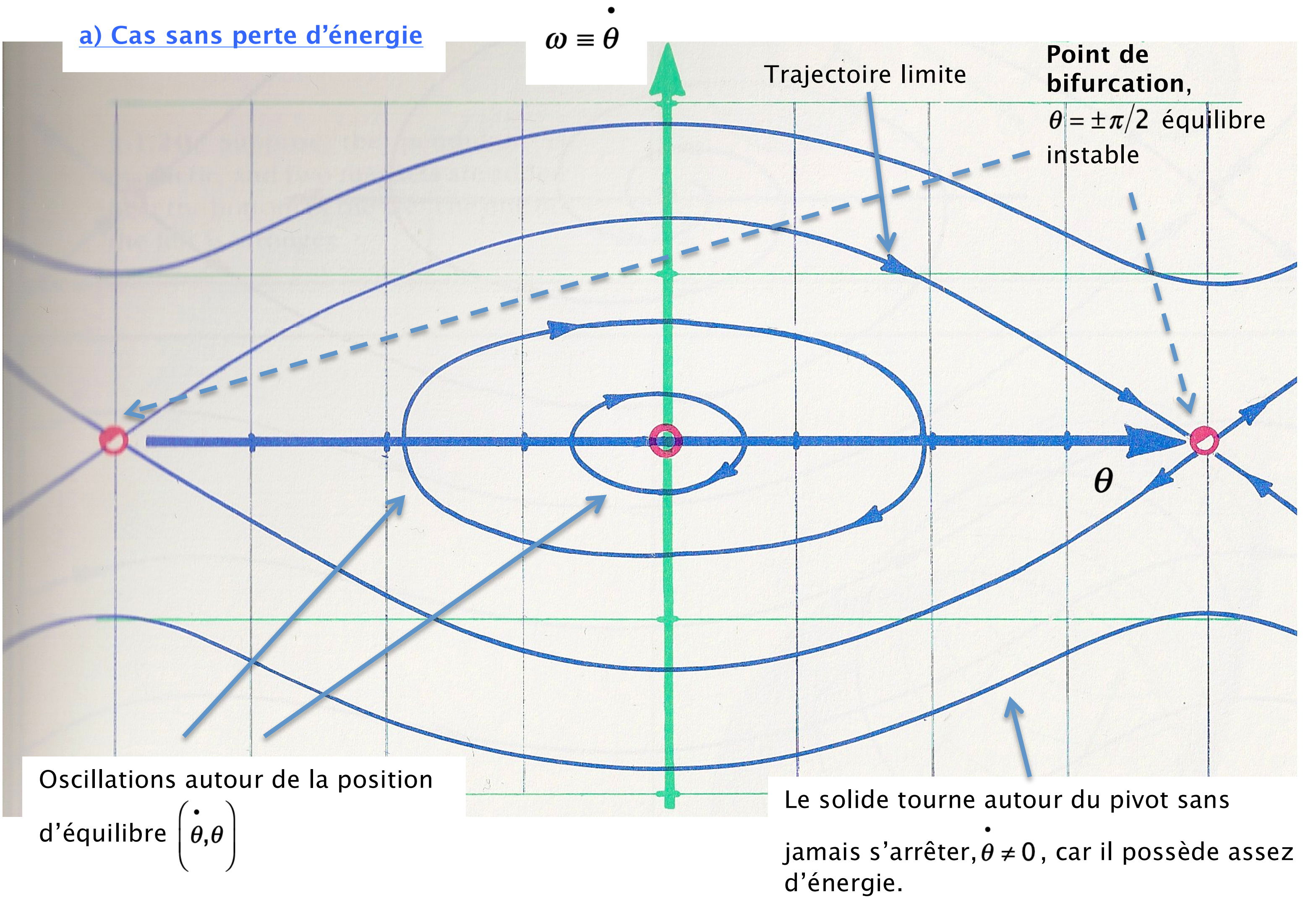
a) Imaginons que le solide soit lâché sans vitesse initiale avec un angle θ_0. Déterminer l'équation différentielle du mouvement qui gouverne l'évolution de l'angle θ par application du théorème du moment cinétique.

b) Retrouver cette équation par une approche énergétique.

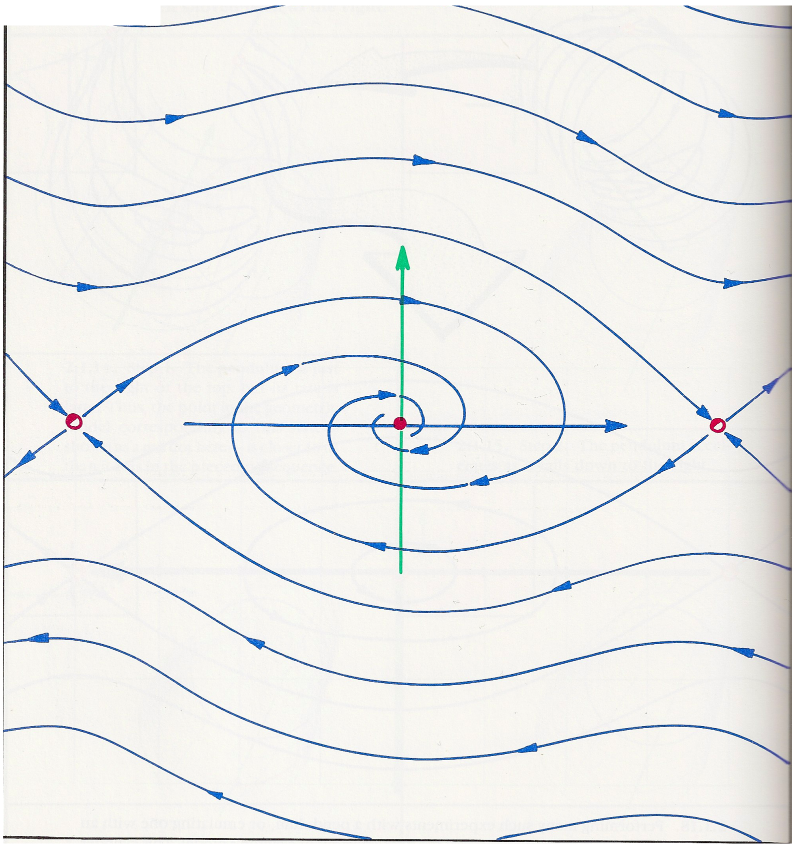
c) Dans le cas de petites oscillations, résoudre l'équation différentielle précédente. Comparer avec le pendule simple.

7.2 Portrait de phase et bifurcation

a) Cas sans perte d'énergie



b) Avec perte d'énergie



VIII – Cas d'un système déformable : exemple de l'étudiant(e) sur un tabouret avec des haltères

On peut visualiser l'expérience ici : **https://www.youtube.com/watch?v=G6XSK72zZJc**

On constate qu'un rapprochement des haltères de l'axe de rotation augmente notablement la vitesse de rotation : c'est une conséquence de la conservation du moment cinétique. Qu'en est-il de l'énergie cinétique ?

8.1 Conservation du moment cinétique

Système : {tabouret tournant + étudiant(e) + haltères}

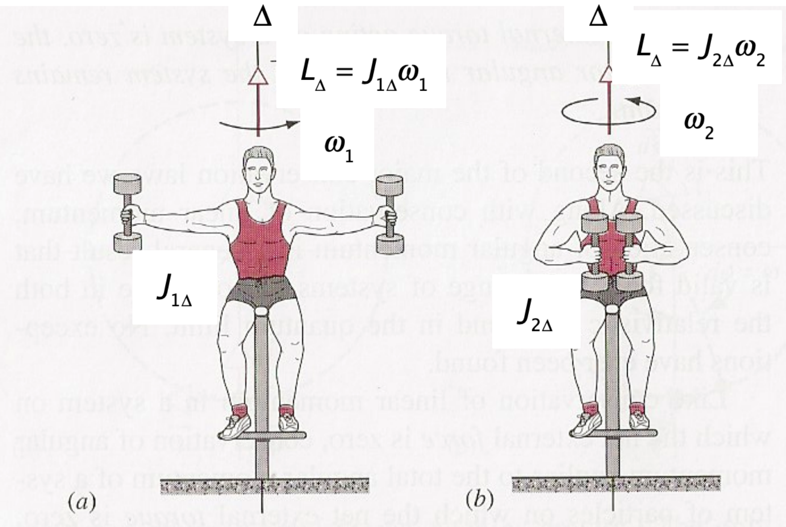


FIGURE 10-12. (*a*) In this configuration, the system (student + weights) has a larger rotational inertia and a smaller angular velocity. (*b*) Here the student has pulled the weights inward, giving a smaller rotational inertia and hence a larger angular velocity. The angular momentum $\vec{L}$ has the same value in both situations.

✔ Position 1 : bras tendus, haltères loin de l'axe de rotation : $J_{1\Delta}$

✔ Position 2 : bras repliés, haltères près de l'axe de rotation : $J_{2\Delta} < J_{1\Delta}$

Loi scalaire du moment cinétique : $\dfrac{dL_\Delta}{dt} = \sum \mathrm{M}_\Delta^{ext}$

Le moment du poids par rapport à l'axe Δ est nul (le poids est parallèle à l'axe). Le moment de la réaction du support de l'axe est nul (puisqu'elle s'exerce sur l'axe) et enfin on a supposé la liaison pivot idéale $\left(\mathrm{M}_\Delta^{liaison} = 0\right)$ On a donc $\sum \mathrm{M}_\Delta^{ext} = 0$ et $\dfrac{dL_\Delta}{dt} = 0$.

Le moment cinétique par rapport à l'axe se conserve :

$$J_{2\Delta}\omega_2 = J_{1\Delta}\omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{J_{1\Delta}\omega_1}{J_{2\Delta}}$$

$J_{1\Delta} > J_{2\Delta}$ donc $\omega_2 > \omega_1$, ***la vitesse angulaire de rotation augmente***.

8.2 Non conservation de l'énergie cinétique

On peut alors calculer la variation d'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} J_{2\Delta}\omega_2^2 - \frac{1}{2} J_{1\Delta}\omega_1^2 = \underbrace{\sum W^{ext}}_{=0} + \sum W^{\text{int}}.$$

$\sum W^{ext} = 0$ car la liaison pivot au niveau de l'axe de rotation du tabouret est supposée idéale et que les autres forces extérieures (poids, réaction) ne travaillent pas au cours du mouvement (bras de levier nul). ***Attention, ici le système est déformable, il faut donc tenir compte des travaux des moments intérieurs.***

$$E_{c2} = \frac{1}{2} J_{2\Delta}\omega_2^2 = \frac{1}{2} J_{2\Delta}\left(\frac{J_{1\Delta}}{J_{2\Delta}}\omega_1\right)^2 = \frac{J_{1\Delta}}{J_{2\Delta}}\left(\frac{1}{2} J_{1\Delta}\omega_1^2\right) = \frac{J_{1\Delta}}{J_{2\Delta}} E_{c1}$$

$$\boxed{J_{2\Delta} < J_{1\Delta} \Rightarrow E_{c2} > E_{c1}}$$

passage de 1→2 $\Delta E_c > 0$ car $\sum W^{\text{int}} > 0$

passage de 2→1 $\Delta E_c < 0$ car $\sum W^{\text{int}} < 0$

Seule la prise en compte du travail des moments des forces intérieures permet d'expliquer la variation de l'énergie cinétique du système.

8.3 Autre exemple de système déformable : tabouret tournant avec roue

On peut visualiser l'expérience ici ***: https://www.youtube.com/watch?v=yfwb39VCNcQ***

A l'aide de la figure ci dessous, essayez d'analyser la situation.

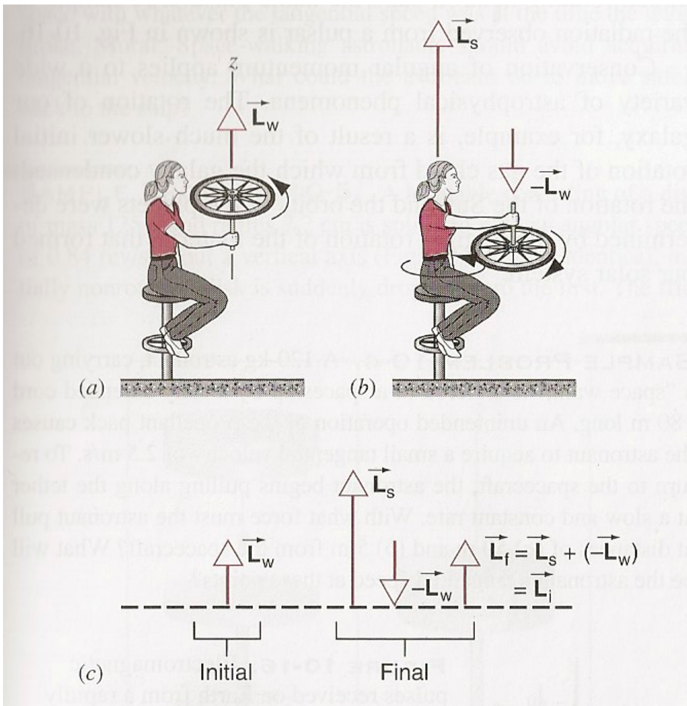


FIGURE 10-14. (*a*) A student holds a rotating bicycle wheel. The total angular momentum of the system is $\vec{L}_w$. (*b*) When the wheel is inverted, the student begins to rotate. (*c*) The total final angular momentum must be equal to the initial angular momentum.