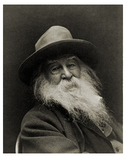
OSCILLATION PARTIE 1 : L'OSCILLATEUR HARMONIQUE A 1D



«La pendule indique le moment, mais qu'est-ce qui indique l'éternité ?»
Walt Whitman (1819-1892), poète et humaniste américain.

I – INTRODUCTION

Un grand nombre de mouvements se répètent de façon régulière au cours du temps: les vibrations d'un cristal de quartz d'une montre, le balancement régulier du pendule d'une horloge de grand-père, les vibrations acoustiques produites par un violoncelle, les allers retours d'un piston de moteur à explosion. Ces types de mouvements, appelés **mouvements périodiques** ou **oscillation**, sont l'objet de ce chapitre.

Un système physique sujet à un mouvement périodique possède toujours **une position d'équilibre**. Lorsqu'il est écarté de cette position d'équilibre et ensuite laissé libre, **une force de rappel** intervient toujours pour ramener le système à sa position d'équilibre. Mais entre-temps, le système a gagné de l'énergie cinétique et va aller plus loin que sa position d'équilibre, s'arrêter quelque part de l'autre côté de la position d'équilibre pour repartir dans l'autre sens vers la position d'équilibre et ainsi de suite.

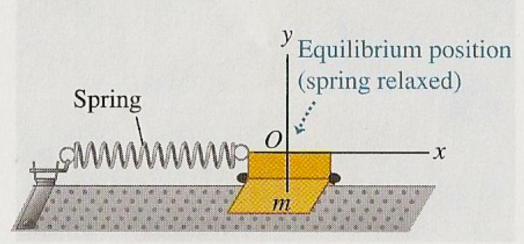
Dans ce chapitre, nous allons concentrer notre étude sur un système simple qui exhibe un mouvement période : **le système masse-ressort horizontal**. Il s'agit **d'un modèle physique** type à partir duquel nous allons pouvoir extraire les propriétés physiques et mathématiques caractéristiques des mouvements périodiques. Dans le cours de physique, nous allons rencontrer d'autres systèmes physiques dont l'évolution temporelle sera périodique.

II – Description des oscillations

2.1 Création des oscillations

La figure 14.1 ci-contre montre un système masse-ressort typique que l'on peut rencontrer en TP. L'ensemble est installé sur un dispositif à air pour supprimer (en réalité jamais totalement) les frottements lors du déplacement de la masse m. Cette dernière est attachée à un ressort de masse négligeable qui peut s'étirer ou se comprimer. La force que va exercer le ressort sur la masse sera donc la seule force horizontale considérée. La réaction normale du support et la force de

14.1 A system that can have periodic motion.



gravité (le poids de la masse) seront les deux seules forces verticales et vont se compenser (cf. figure 14.2).

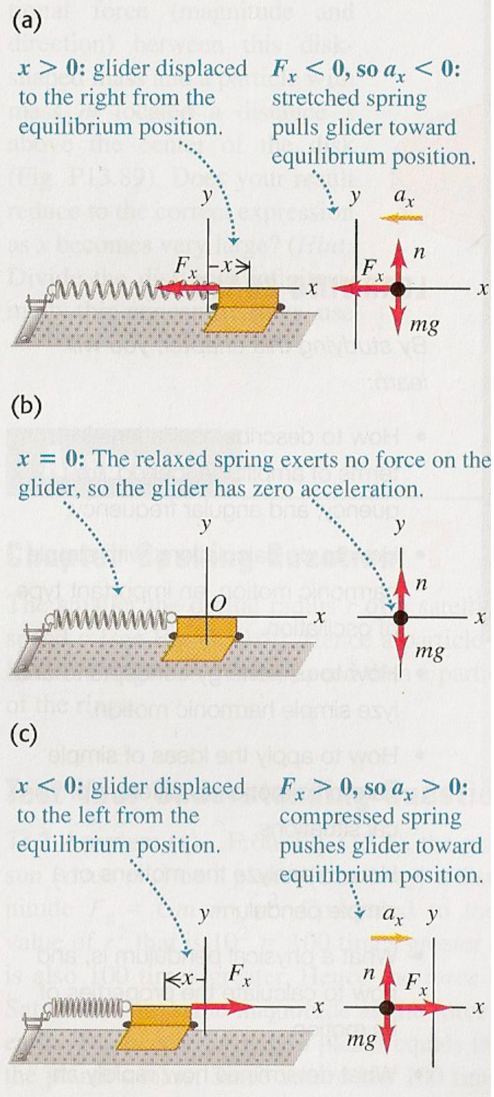
L'évolution temporelle de la position de la masse sera décrite par la coordonnée $x(t)$. Il est commode pour la suite de prendre comme origine O la position d'équilibre de la masse quand le ressort n'est ni comprimé ni étiré. La masse va être soumise à **la force (horizontale) de rappel dite élastique** du ressort F_x. D'après **la seconde loi de Newton :**

$$\text{Sur l'axe } Ox \Rightarrow \quad ma_x = F_x \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m}$$
$$\text{Sur l'axe } Oy \Rightarrow \quad ma_y = 0 = N - mg$$

La masse a un mouvement purement horizontal (mouvement à 1D).

Au départ, on écarte la masse d'une position $x = A$ puis on la lâche sans vitesse initiale (figure 14.2 (a)). Du fait de la force de rappel élastique du ressort, la masse va être « ramenée » vers sa position d'équilibre $x = 0$ (figure 14.2 (b)). Mais, comme nous l'avons déjà indiqué, entre-temps, le système a gagné de l'énergie cinétique et va aller plus loin que sa position d'équilibre vers la gauche (figure 14.2 (c)) et s'arrêter de l'autre côté en $x = A$, repartir dans l'autre sens à nouveau vers la position d'équilibre à cause de F_x qui a changé de direction entre-temps et ainsi de suite.

14.2 Model for periodic motion. When the body is displaced from its equilibrium position at $x = 0$, the spring exerts a restoring force back toward the equilibrium position.



Si aucune force de frottement n'est présente pour faire diminuer l'énergie mécanique du système masse-ressort, le mouvement d'aller retour de la masse va se répéter indéfiniment, **la masse va osciller** ! ***Il est important de noter que des oscillations se produisent s'il existe une force de rappel capable de ramener le système vers sa position d'équilibre.***

2.2 Amplitude, période, fréquence et fréquence angulaire (ou pulsation)

Nous allons définir les grandeurs qui vont nous servir par la suite à décrire de façon qualitative et mathématique le mouvement périodique.

⇒ **L'AMPLITUDE** du mouvement notée A. Il s'agit de l'amplitude maximale du déplacement de la masse par rapport à la position d'équilibre, c'est-à-dire la valeur maximale de $|x|$. A est donc une grandeur toujours positive ! Il s'agit d'une longueur qui en SI s'exprime en mètre.

Une vibration complète où **cycle** correspond à un aller-retour complet, de A à $-A$ puis de nouveau vers A.

⇒ **LA PERIODE** notée T. Il s'agit de la durée complète d'un cycle. Il s'agit d'une grandeur positive homogène à un temps et qui en SI s'exprime en seconde (s).

⇒ **LA FREQUENCE** notée f. Elle indique le nombre de cycles effectués pendant une unité de temps. Il s'agit d'une grandeur positive homogène à l'inverse d'un temps et qui en SI s'exprime en seconde^{-1} (s^{-1}). En l'honneur du physicien Allemand Heinrich Hertz (1857-1894), pionnier dans l'étude des ondes électromagnétiques, en SI on utilise le hertz :

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$$

⇒ **LA FREQUENCE ANGULAIRE OU PULSATION** notée ω correspond à 2π fois la fréquence: $\omega = 2\pi f$. Nous verrons pourquoi ω est une grandeur utile. Elle représente le taux de variation d'une grandeur angulaire (pas nécessairement liée à une mouvement de rotation), elle s'exprime donc en radiant par seconde ($rad.s^{-1}$).

A partir des définitions précédentes, on voit que fréquence et période sont inverses l'une de l'autre. On retiendra donc les relations suivantes :

$$f = \frac{1}{T} \quad T = \frac{1}{f} \quad \text{et} \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

III – Oscillateur harmonique: mise en équation

3.1 Force de rappel élastique : loi de Hooke

Le type d'oscillation le plus simple se produit quand la force de rappel F_x est directement proportionnelle au déplacement x de la masse par rapport à sa position d'équilibre. Cela se produit si le ressort est considéré comme idéal, c'est-à-dire vérifiant la loi de Hooke. Dans ce cas, on retiendra l'expression suivante :

Force de rappel élastique d'un ressort idéal: loi de Hooke

$$F_x = -kx$$

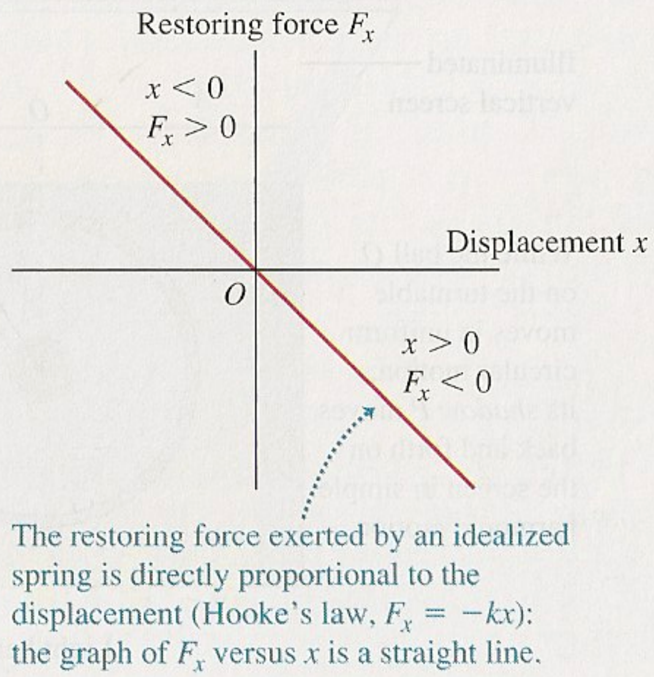
(avec position d'équilibre en $x = 0$)

(cas général: $\vec{F} = -k\left(\ell - \ell_0\right)\vec{i}$)

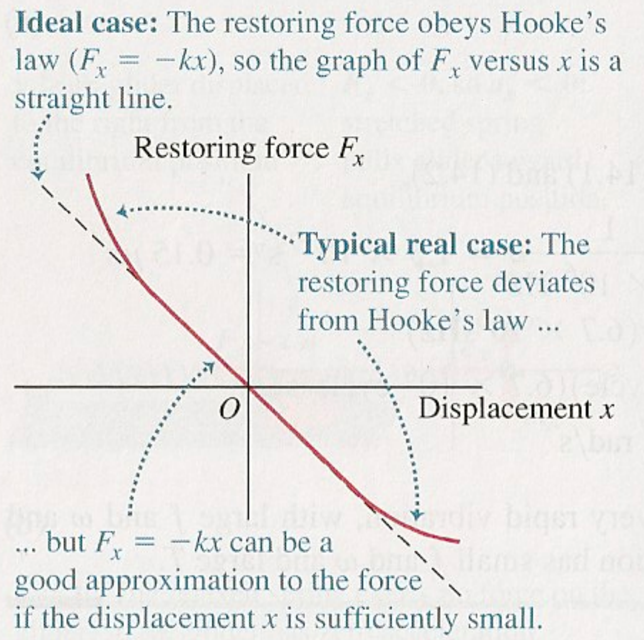
F_x et x sont toujours de signe opposé, il en est ainsi pour que la force soit toujours dirigée vers la position d'équilibre (cf. figure 14.3). k est la constante de raideur de ressort, elle est toujours positive et a pour unité des $N.m^{-1}$ ou $kg.s^{-2}$. Elle est propre à chaque ressort suivant sa géométrie, la nature de son matériau etc…

Il faut garder en tête que la loi de Hooke est une bonne approximation de la réalité tant que le déplacement x de la masse (et donc l'étirement ou la compression du ressort) n'est pas trop important (cf. figure 14.4). Quand x devient trop importante, la dépendance de F_x en x n'est plus linéaire et devient plus compliquée. **Nous allons donc nous restreindre dans la suite au cas des petites oscillations autour de la position d'équilibre**. Il s'agit d'un bon modèle pour décrire un grand nombre de phénomènes physiques comme nous le verrons dans le cours de physique.

14.3 An idealized spring exerts a restoring force that obeys Hooke's law, $F_x = -kx$. Oscillation with such a restoring force is called simple harmonic motion.



14.4 In most real oscillations Hooke's law applies provided the body doesn't move too far from equilibrium. In such a case small-amplitude oscillations are approximately simple harmonic.



3.2 Equation différentielle d'un oscillateur harmonique

Puisque $F_x = -kx$ et que par définition $a_x \equiv d^2x/dt^2$, la seconde loi de Newton $a_x = F_x/m$ donne l'équation du mouvement de la masse :

Equation différentielle de l'oscillateur harmonique

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

(avec position d'équilibre en $x = 0$)

D'un point de vue mathématique, il s'agit d'une **équation différentielle d'ordre** deux puisque la dérivée seconde de la fonction $x(t)$ intervient. Un oscillateur qui vérifie cette équation est dit **HARMONIQUE** à cause de la nature particulière de sa solution comme nous allons le voir. Tous les mouvements périodiques ne sont pas harmonique. C'est le cas par exemple si F_x ne vérifie plus la loi de Hooke.

Vous apprendrez dans vos cours de physique et de mathématiques que les mouvements périodiques harmoniques jouent un rôle essentiel pour tous les autres mouvements périodiques. Noter que l'accélération $a_x \equiv d^2x/dt^2$ est toujours opposée à la position : $a_x = -(k/m)x$.

<u>*3.3 Résolution de l'équation différentielle*</u>

Il s'agit à présent de résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, c'est-à-dire trouver une fonction $x(t)$ telle que $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$. On peut essayer comme solution une fonction sinusoïdale car si on dérive deux fois une telle fonction, on retombe sur la même fonction (au signe près). On va donc chercher une solution de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

On voit déjà que A correspond à l'amplitude des oscillations, c'est-à-dire la valeur maximale de $x(t)$. On va voir qu'évidemment ω correspond à la pulsation des oscillations d'où la notation utilisée. φ s'appelle **la phase à l'origine** car dans le cas général, à $t = 0$, x noté x_0, vaut $A\cos\varphi$, nous allons en reparler. Vérifions si cette solution est valable.

$$v_x \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\cos(\omega t + \varphi)\right] = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a_x \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

On reporte dans l'équation différentielle:

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m}A\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)A\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

Ainsi notre solution est valable si : $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

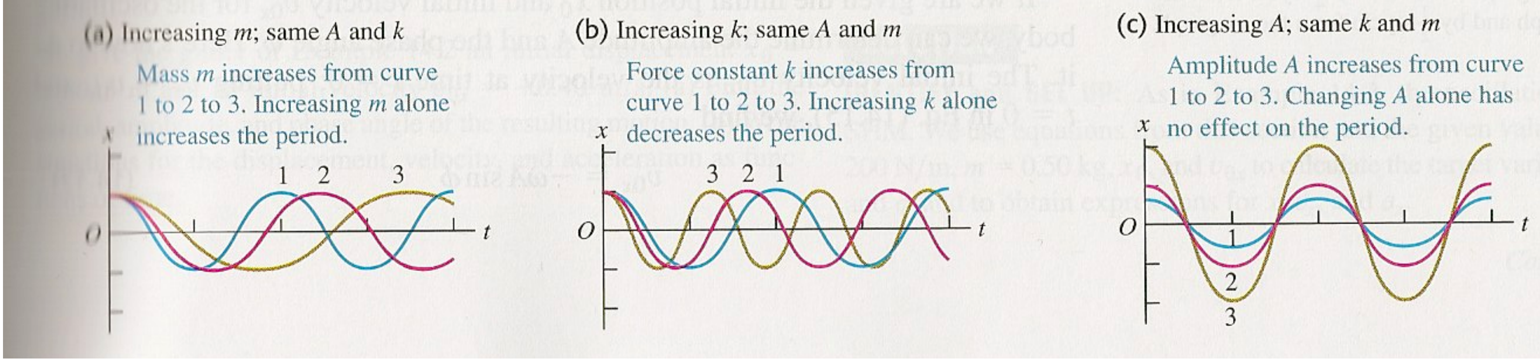
La pulsation dépend donc des caractéristiques physiques de notre système ici k et m. Pour d'autres types d'oscillateur, par exemple le pendule simple ou le circuit RC, ω aura une autre expression.

Montrons à présent que ω correspond bien à la pulsation telle que nous l'avons introduit dans le paragraphe 2.2. Par définition de la période T des oscillations :

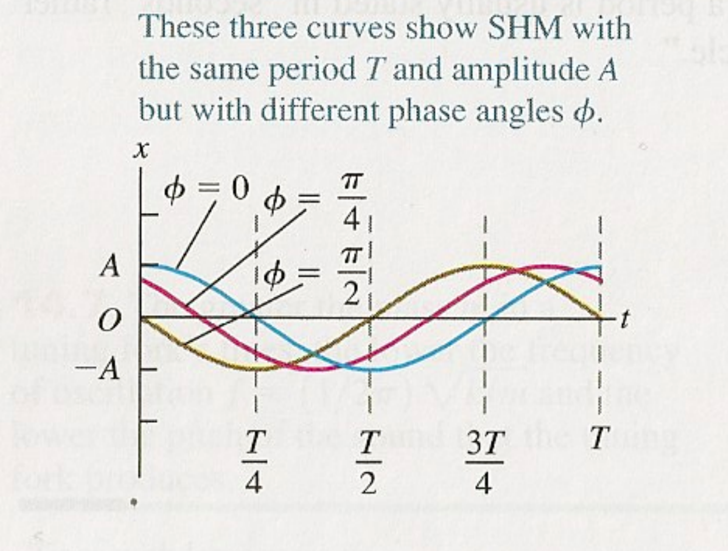
$$A\cos(\omega(t + T) + \varphi) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Or, la fonction $\cos$ est périodique de période 2π, il faut donc que $\omega T = 2\pi$. On retrouve donc bien les relations du paragraphe 2.2: $\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$

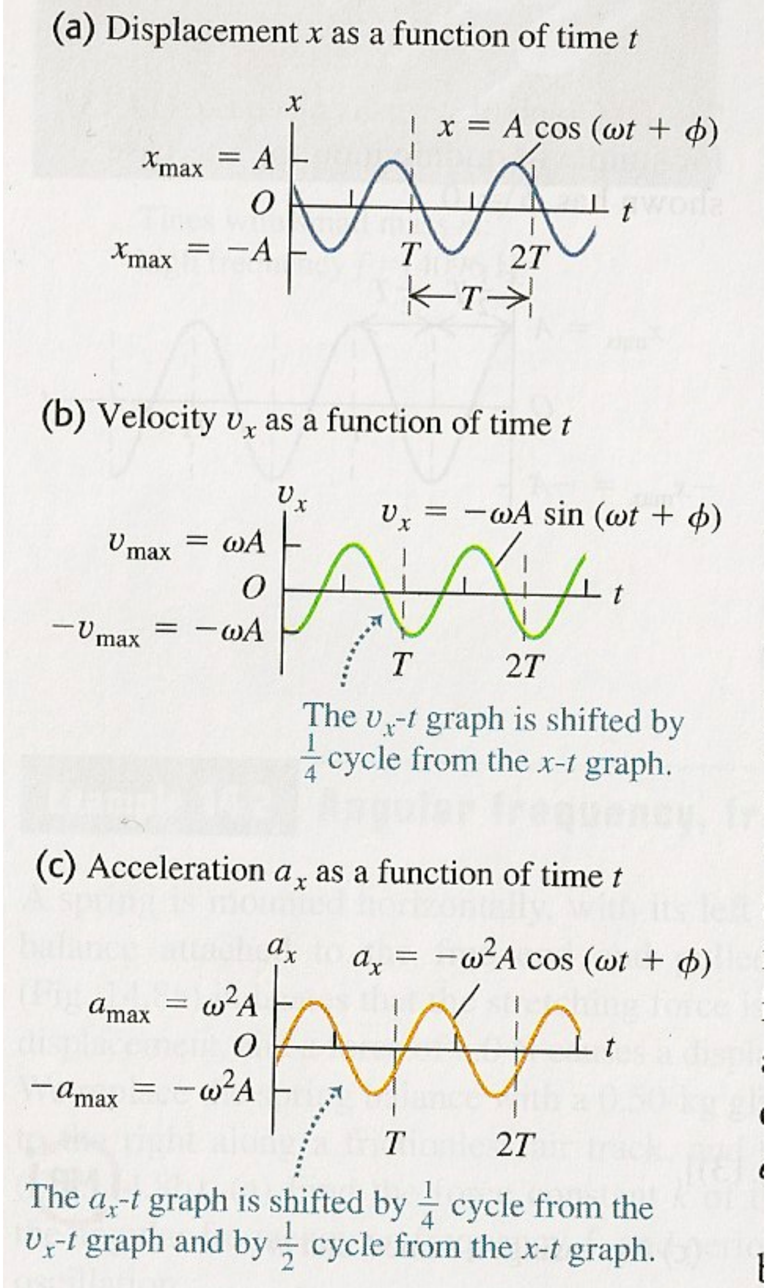
Les figures 14.10 et 14.11 ci-dessous montrent l'évolution temporelle de x suivant différentes valeurs de m, k et φ (noté ϕ sur ces schémas)



14.10 Variations of simple harmonic motion. All cases shown have $\phi = 0$ [see Eq. (14.13)].



14.11 Variations of SHM: displacement versus time for the same harmonic oscillator with different phase angles ϕ.



14.12 Graphs of (a) x versus t, (b) v_x versus t, and (c) a_x versus t for a body in SHM. For the motion depicted in these graphs, $\phi = \pi/3$.

La figure ci contre 14.12 compare l'évolution temporelle de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse pour une phase à l'origine donnée.

3.4 Conditions initiales

Pour déterminer complètement $x(t)$, il reste à trouver l'amplitude A et la phase à l'origine φ en fonction des **conditions initiales** du système physique, c'est-à-dire la position initiale de la masse notée x_0 (de combien on tire ou comprime le ressort au départ) et sa vitesse initiale notée v_{0x}. D'un point de vue mathématique, l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique est d'ordre deux, il faut donc deux conditions initiales pour déterminer x : la valeur de la fonction à l'instant initial $x(t=0)$ et la valeur de sa dérivée première à ce même instant initial $dx/dt)_{t=0}$.

A $t=0$, $x_0 = A\cos\varphi$ et $v_{0x} = -\omega A\sin\varphi$. En prenant le rapport de ces deux expressions $\frac{v_{0x}}{x_0} = \frac{-\omega A\sin\varphi}{A\cos\varphi}$, on obtient l'expression de la phase :

$$\boxed{\varphi = \arctan\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right)}$$

On a $A\cos\varphi = x_0$ et $A\sin\varphi = -v_{0x}/\omega$, en prenant le carré de chaque expression et en les ajoutant, ce la donne $A^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = A^2 = x_0^2 + \left(v_{0x}^2/\omega^2\right)$ car soit :

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}}}$$

On remarque que si la masse possède à la foi une position initiale et une vitesse initiale non nulle, l'amplitude A n'est pas égale à x_0. En effet, si vous donnez une vitesse initiale non nulle à la masse, elle va aller plus loin que x_0 avant de faire demi-tour !

3.5 Résumé des résultats

• Equation différentielle de l'oscillateur harmonique $\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

• Solution $\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

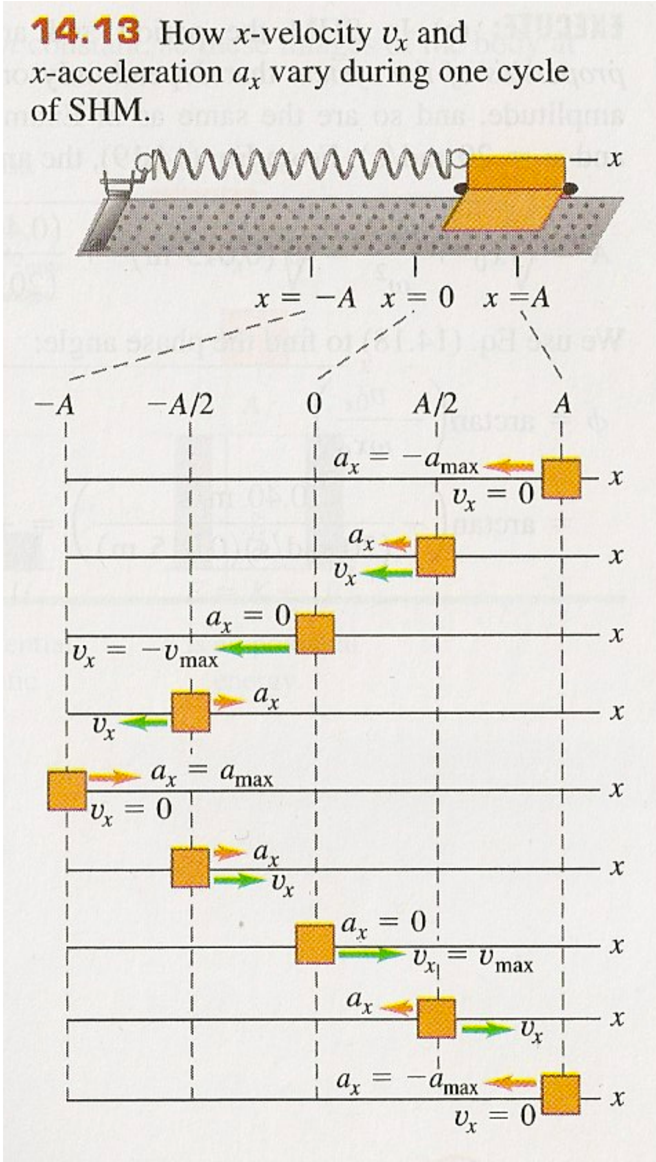
avec dans le cas particulier du système $\{\text{masse+ressort}\}$ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

• Conditions initiales $\Rightarrow \varphi = \arctan\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right)$ et $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}}$ (à savoir retrouver !!)

La figure 14.13 ci-contre compare l'évolution de la vitesse et de l'accélération de la masse durant une période d'oscillation.

$\Rightarrow$En $x=0$ la vitesse en maximale. Par contre, l'accélération est nulle. En effet $F_x=-kx=0$ donc $a_x=0$, le ressort n'est ni comprimé ni étiré.

$\Rightarrow$En $x=\pm A$ la vitesse s'annule, la masse change de direction, on parle **de points de rebroussement**. Par contre, l'accélération est maximale. En effet $|F_x|=kA$ est maximale, le ressort est dans son état de compression ou d'étirement maximal.



On remarque que si la masse possède à la fosi une position initiale et une vitesse initiale non nulle, l'amplitude A n'est pas égale à x_0. En effet, si vous donnez une vitesse initiale non nulle à la masse, elle va aller plus loin que x_0 avant de faire demi-tour !

IV – Etude énergétique

Pour finir, nous allons étudier l'oscillateur harmonique sous l'approche énergétique. Il est toujours riche et instructif d'étudier un système physique sous son approche énergétique, il s'agit même souvent de l'étude la plus riche.

Nous étudierons en détail l'aspect énergétique des systèmes en mécanique et en thermodynamique plus tard mais vous savez déjà, depuis la terminale, que le système $\{$ressort-masse$\}$ possède :

$\Rightarrow$ UNE ENERGIE CINETIQUE liée à **la vitesse** de déplacement de la masse et qui vaut :

$$\boxed{E_c=\frac{1}{2}mv_x^2}$$

Exercice d'application

Une masse de $0{,}5\text{ kg}$ est attachée à un ressort horizontal idéal, on néglige la présence des frottements. La masse complète une oscillation en 2,00 s. L'amplitude des oscillations vaut 0,40 m. A l'instant initial, la masse est lâchée sans vitesse.

a) Déterminer la période T, la fréquence f et la fréquence angulaire ω des oscillations.

b) Déterminer la constante de raideur k du ressort.

c) Déterminer la phase φ des oscillations.

d) Déterminer $x(t)$. On prend $x = 0$ comme position d'équilibre du système (ressort-masse).

e) Déterminer $v_x(t)$ et la vitesse maximale.

f) Déterminer $a_x(t)$ et l'accélération maximale.

⇒ **UNE ENERGIE POTENTIELLE** liée à la présence de la force de rappel élastique du ressort. Le ressort, lorsqu'il est comprimé ou étiré peut « stocker » de l'énergie qui peut être « potentiellement » convertie en une autre forme d'énergie, en l'occurrence ici cinétique. Cette énergie dépend non pas de la vitesse de la masse mais de **sa position**, car elle est liée à la compression ou à l'étirement du ressort. Nous justifierons plus tard l'expression de l'énergie potentielle de la force de rappel, nous allons pour l'instant admettre le résultat suivant :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

Il n'y a aucune force de frottement prise en compte dans l'étude de notre oscillateur, cas idéal, on s'attend donc à ce que **l'énergie mécanique** du système définie comme la somme de son énergie potentielle et de son énergie cinétique doit être **une grandeur conservée, c'est-à-dire une constante au cours du temps**. Nous allons montrer cela.

$$\begin{aligned}
E_m = E_p + E_c &= \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\
&= \frac{1}{2}m\left[-\omega A\sin(\omega t+\varphi)\right]^2 + \frac{1}{2}k\left[A\cos(\omega t+\varphi)\right]^2 \\
&= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \text{ car } \omega=\sqrt{k/m} \\
&= \frac{1}{2}kA^2
\end{aligned}$$

On voit donc que l'énergie mécanique est une constante et est proportionnelle au carré de l'amplitude :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante}}$$

Notons les observations suivantes :

⇒ E_c et E_p sont des fonctions périodiques, toujours positives, de période $T/2$ à cause du carré dans sin et cos.

⇒ E_c et E_p sont en **opposition de phase**, quand l'une est maximale, l'autre est minimale

⇒ Le **système possède une énergie purement potentielle en $x = \pm A$ et une énergie purement cinétique quand la masse passe à la position d'équilibre en $x = 0$.**

La figure 14.10 montre l'évolution de E_p en fonction de x qui est une fonction parabolique. La figure 14.11 montre les évolutions de E_p, E_c et de x en fonction du temps. Enfin, la figure 14.14 montre l'échange entre E_p (notée U sur la figure) et E_c (notée K sur la figure) en fonction du déplacement de la masse.

FIGURE 14.10 The energy is transformed between kinetic energy and potential energy as the object oscillates, but the mechanical energy $E = K + U$ doesn't change.

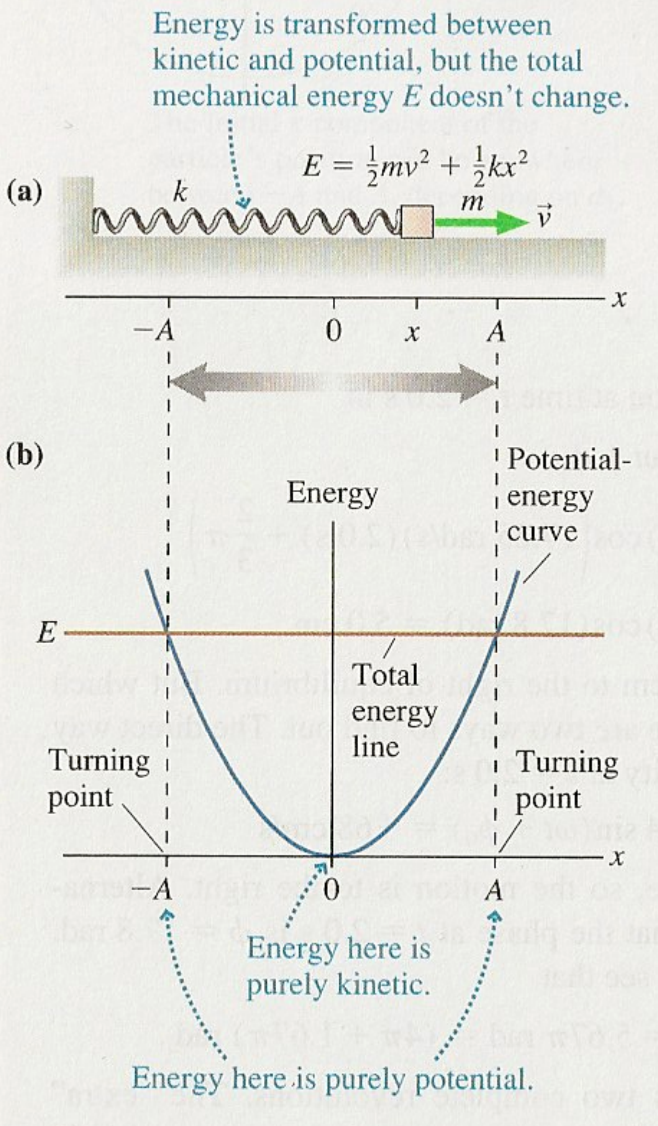
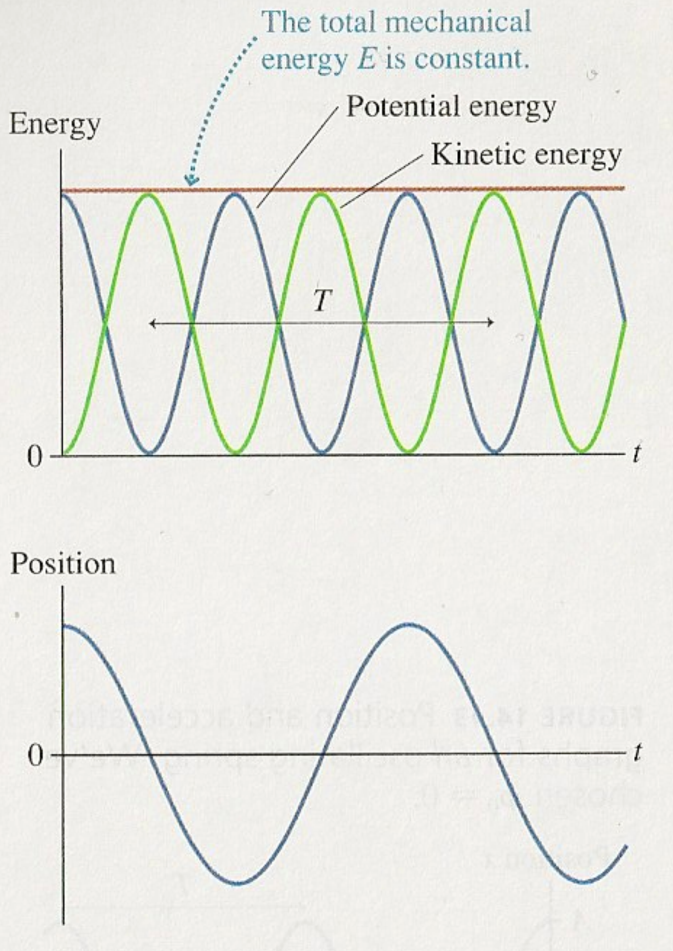
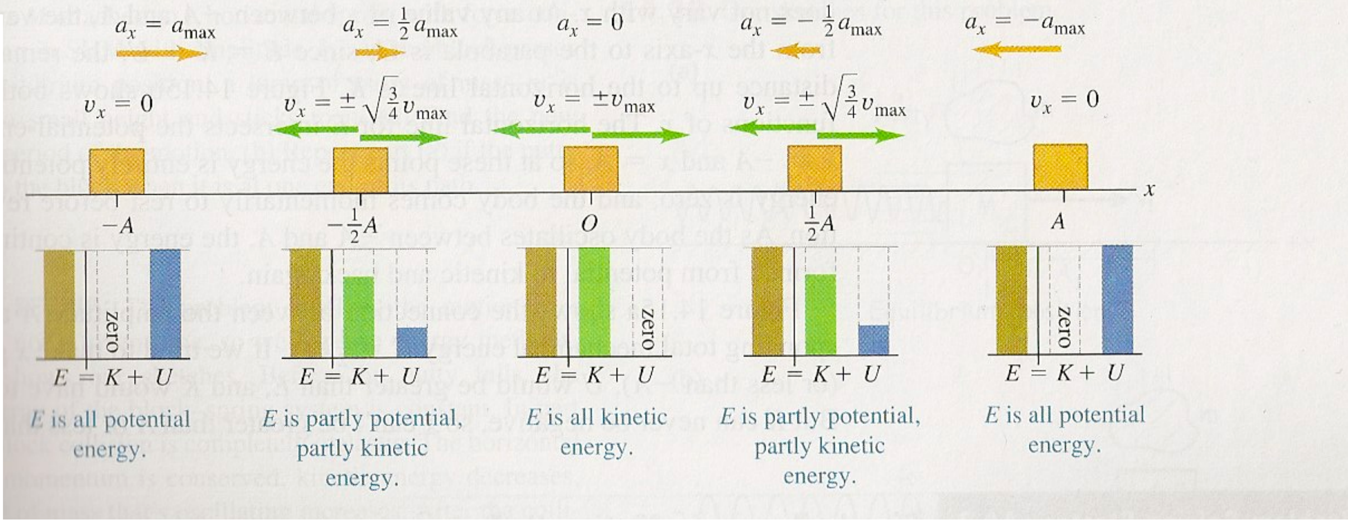


FIGURE 14.11 Kinetic energy, potential energy, and the total mechanical energy for simple harmonic motion.



14.14 Graphs of E, K, and U versus displacement in SHM. The velocity of the body is *not* constant, so these images of the body at equally spaced positions are *not* equally spaced in time.



V – Oscillations verticales

Nous allons étudier le mouvement d’une masse attachée à un ressort vertical. Nous négligeons tous les frottements.

a) Expression de la force de rappel élastique

FIGURE 14.16 Gravity stretches the spring.

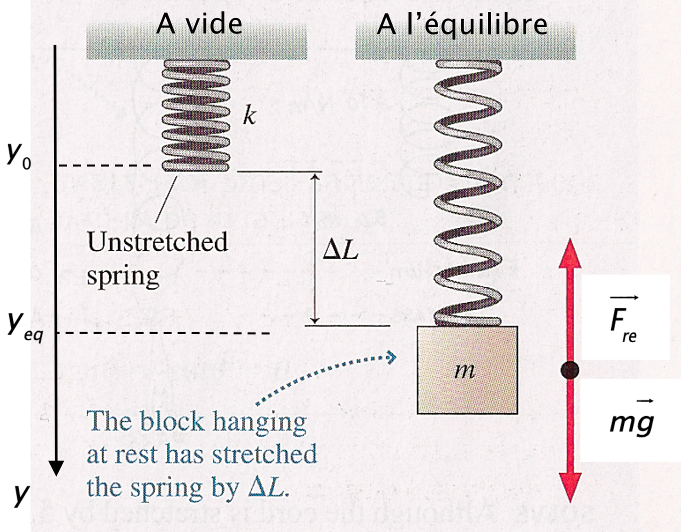
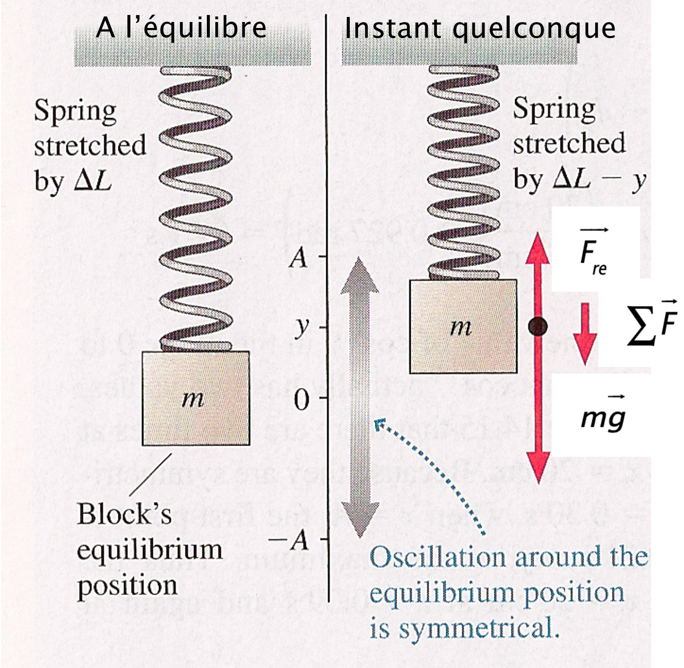


FIGURE 14.17 The block oscillates around the equilibrium position.



La gravité va jouer un rôle ici, lequel ?

➪ A l’équilibre : **(Calculs au tableau)**

b) Equation du mouvement

On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse : $m\vec{a} = \sum \vec{F} = -k\left(y - y_{eq}\right)\vec{j}$.

On s'intéresse à l'oscillation de la masse autour de la position d'équilibre y_{eq}. On peut donc faire un changement d'origine (ce qui revient à faire un changement de variable) et prendre pour nouvelle origine la position d'équilibre, on écrit: $y_{eq} \equiv 0$.

En projetant sur l'axe (Oy), on obtient l'équation différentielle caractéristique d'un **mouvement harmonique** :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \text{ avec } \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Il s'agit d'une équation différentielle très importante dont il faut parfaitement connaître l'interprétation physique. L'expression de la pulsation ω, homogène à l'inverse d'un temps, est propre à chaque système physique étudié.

c) Résolution

On a déjà résolue cette équation différentielle. Rappelons ici les résultats obtenus :

$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \equiv \text{Pulsation dont l'expression dépend du problème physique}$$
$$\left.\begin{array}{l} A \equiv \text{Amplitude maximale} \\ \phi_0 \equiv \text{ phase à l'origine} \end{array}\right\} \text{à déterminer avec les CI}$$