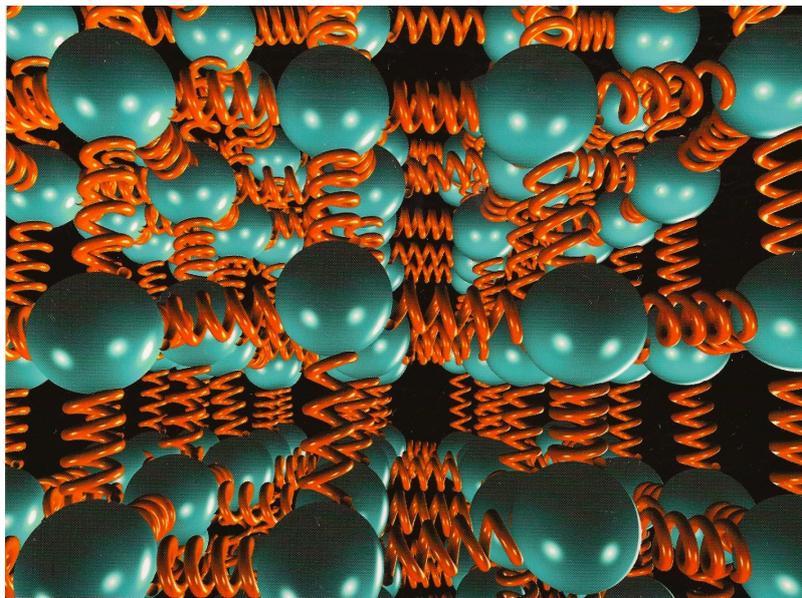


OSCILLATION PARTIE 2 : MOUVEMENT LIBRE D'UN OSCILLATEUR HARMONIQUE

« Il faut apprendre à rester serein au milieu de l'activité et à être vibrant de vie au repos. »
Gandhi (1869-1948)

Dans ce chapitre, nous allons étudier les petits mouvements d'un système physique autour d'une position d'équilibre stable, ce problème se pose dans de **nombreuses branches de la physique** :

- ✓ En mécanique : étude du mouvement d'une masse liée à un ressort, étude du mouvement d'un pendule simple...
- ✓ En électrocinétique : étude de l'évolution de la charge d'un condensateur dans un circuit série *RLC* ...
- ✓ En chimie : étude des vibrations d'une molécule diatomique, modélisation des liaisons interatomiques dans un solide cristallin (cf figure ci-dessous)...



- ✓ En optique : étude de l'interaction des électrons avec un champ électrique (modèle de l'électron élastiquement lié)...

Cette liste n'est bien sur pas exhaustive. L'étude de ces divers systèmes physiques conduit à un **traitement mathématique identique**. En effet, leur évolution temporelle est régie par une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.

Dans ce chapitre, on travaillera dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les systèmes physiques étudiés seront décrits par un seul degré de liberté. Par exemple, une masse liée à un ressort est décrite par sa position $x(t)$, un pendule simple est décrit par un angle $\theta(t)$, un circuit *RLC* par la charge du condensateur $q(t)$ etc...

I – Oscillateur harmonique : rappels et compléments

1.1 Equation du mouvement

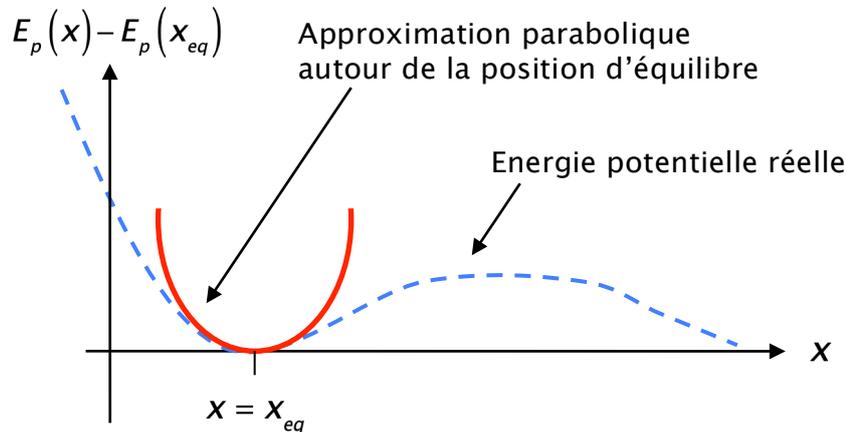
On considère une particule de masse m qui est soumise à une force conservative. On travaille à un degré de liberté (c'est-à-dire à une dimension). L'application du principe fondamental de la

dynamique sur un axe (Ox) donne : $m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$.

On note la position d'équilibre x_{eq} . Quand l'équilibre est stable, on a $\left(\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} > 0$. On va

effectuer un développement limité de $E_p(x)$ au voisinage de la position d'équilibre x_{eq} ce qui

donne : $E_p(x) = E_p(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \left(\frac{dE_p(x)}{dx}\right)_{x=x_{eq}} + \frac{(x - x_{eq})^2}{2} \left(\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} + \dots$,



ce qui donne au voisinage de la position d'équilibre, en notant $k \equiv \left(\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} > 0$,

$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + \frac{(x - x_{eq})^2}{2} k$. On obtient une énergie potentielle de forme parabolique autour de la position d'équilibre comme le montre le schéma ci-dessus.

Au voisinage de l'équilibre, la force qui dérive de cette énergie est de la forme $F(x) = -k(x - x_{eq})$ qui est analogue à l'expression de la force de rappel élastique d'un ressort. L'équation

différentielle du mouvement s'écrit : $m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k(x - x_{eq})$. Il est judicieux pour se simplifier la

tâche de prendre $x_{eq} = 0$ ce qui est identique à faire le changement de variable $X = x - x_{eq}$ avec

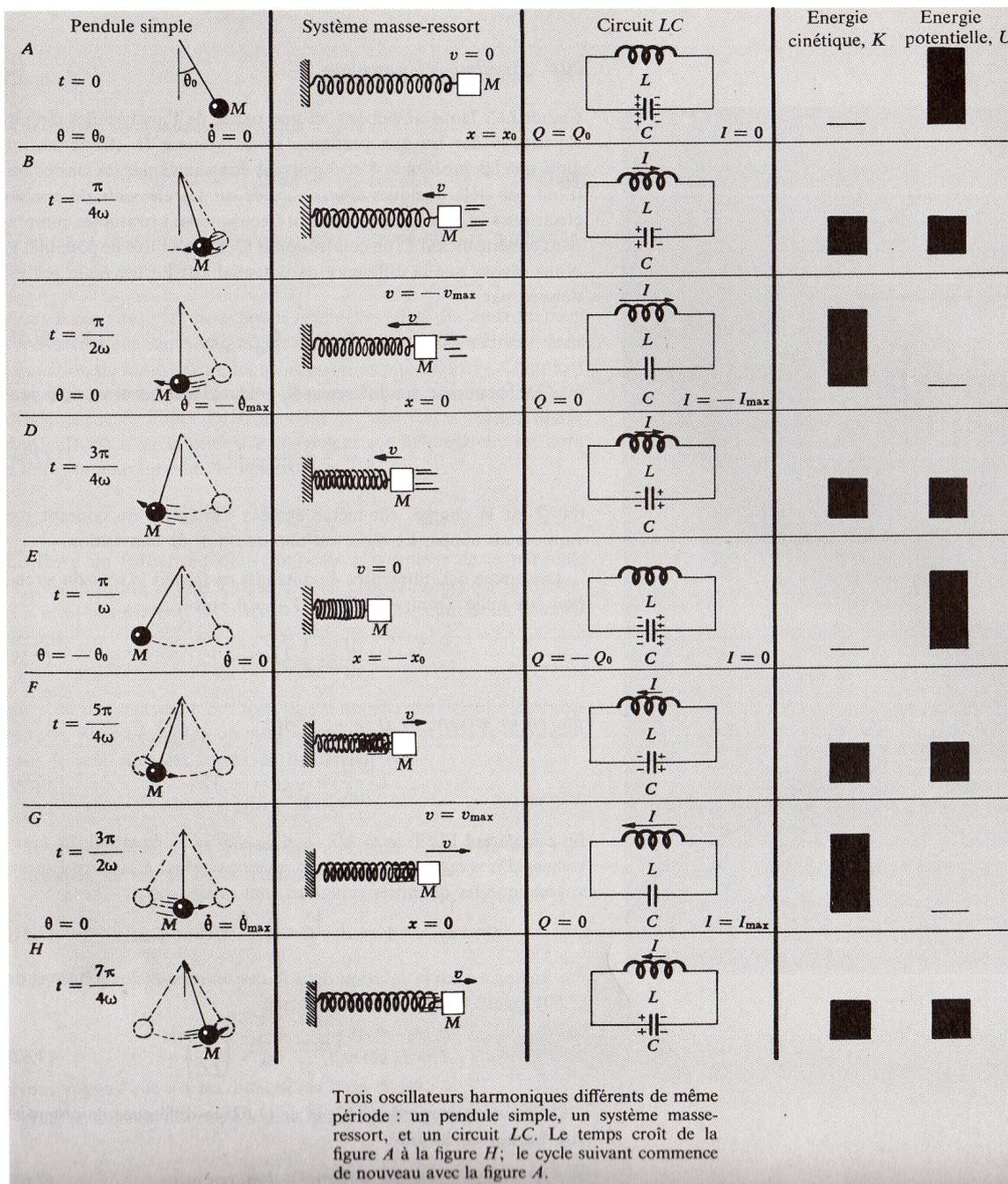
$\ddot{X} = \ddot{x}$. On obtient au final :

Au voisinage de la position d'équilibre $x_{eq} = 0$:

Equation différentielle du mouvement: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$

Force de rappel: $F = -k x$

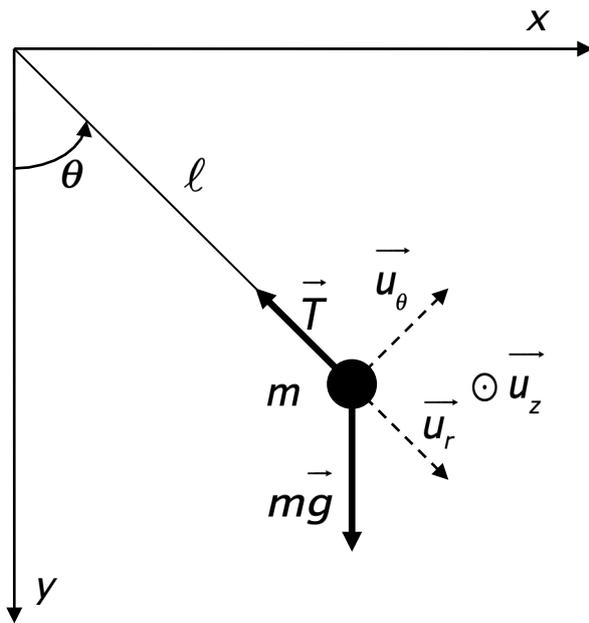
ω_0 est homogène à une pulsation, c'est la **pulsation propre**. L'équation différentielle du second ordre que l'on a rencontré pour la première fois dans le cadre d'une masse liée à un ressort peut décrire l'évolution de nombreux systèmes physiques pour peu que cette **évolution reste proche de la situation d'équilibre**.



La figure ci-dessous montre différents systèmes physiques décrits par l'équation (1). Bien sur, à chaque fois x représente une grandeur physique différente et ω_0 s'exprime de façon différente en fonction des grandeurs physiques du problème. Mais dans tous les cas, on a un **phénomène physique oscillatoire en l'absence d'amortissement**.

Exercice d'application 1 : Pendule simple : Equation différentielle

(A connaître, au programme !)



On considère le pendule simple suivant.

- En utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation différentielle qui gouverne l'évolution de θ .
- Retrouver cette équation par une approche énergétique.
- Simplifier l'équation précédente dans le cas des petits angles et en déduire la pulsation caractéristique du pendule.

1.3 Résolution

On a déjà résolu l'équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$. Nous allons rappeler les résultats obtenus. La solution est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad X_m \equiv \text{amplitude}$$
$$\varphi \equiv \text{phase à l'origine et } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \text{période propre}$$

Si à l'instant initial, $x(t=0) = x_0$ et $v(t=0) = v_0$ on a $\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$ et $X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$. Il est aussi possible d'écrire $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ ou A et B sont deux nouvelles constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales (vous pouvez faire cela en exercice).

On remarque que dans notre cas, c'est-à-dire les oscillations de petites amplitudes, T_0 ne dépend pas de l'amplitude X_m , on parle **d'isochronisme**. Cela n'est plus vrai dans le cas général, c'est-à-dire pour des oscillations d'amplitudes quelconques.

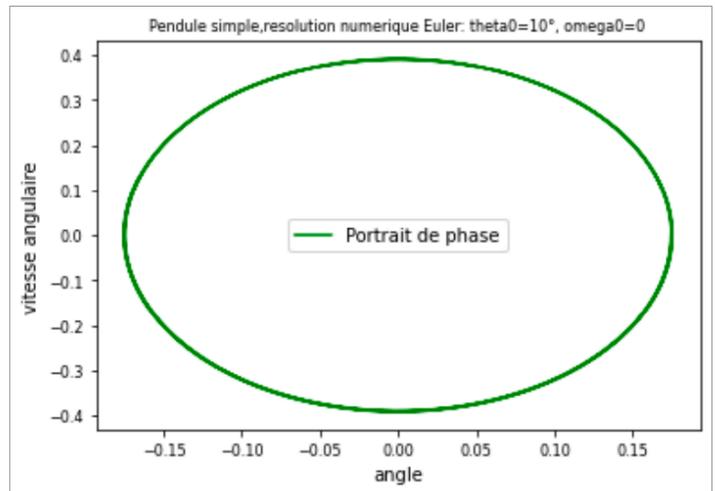
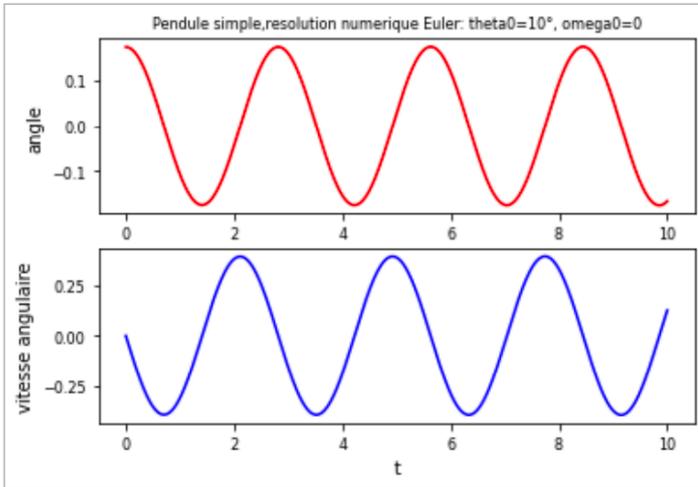
Exercice d'application 2 : pendule simple : Portrait de phase

- a) Donner une relation mathématique qui relie $\theta(t)$ et la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$.
- b) Si l'on porte en abscisse θ et en ordonnée $\dot{\theta}$, quelle est la nature de ce portrait de phase ?

Les figures ci-dessous montrent respectivement l'évolution de $\theta(t)$ et le portrait de phase du pendule dans le cas d'une résolution numérique de l'équation différentielle $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$ (cf. cours d'informatique sur la méthode d'Euler avec Python).

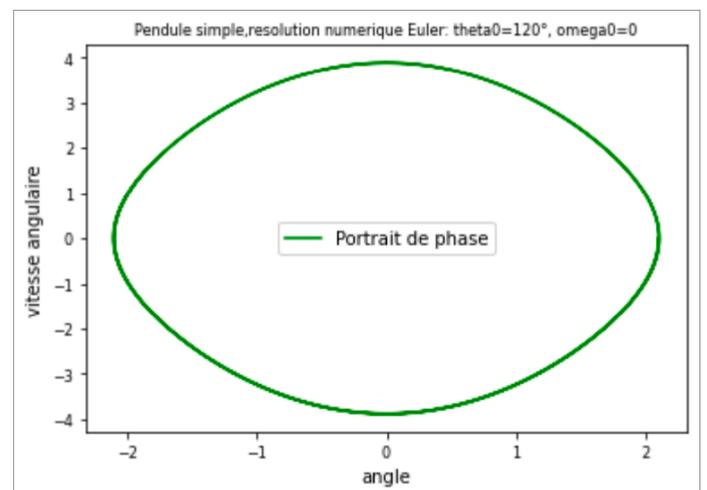
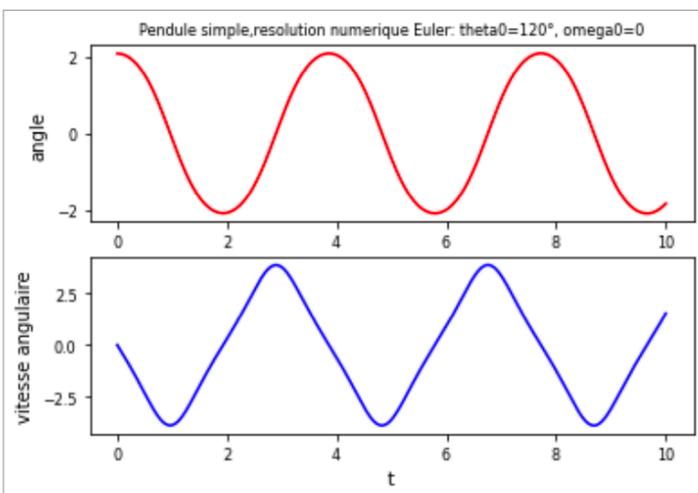
Les courbes ci dessous correspondent aux conditions initiales :

$$\left\{ \theta(t=0) = 10^\circ, \dot{\theta}(t=0) = 0 \right\}, \text{ cas du pendule linéaire,}$$



et celles ci-dessous aux conditions initiales :

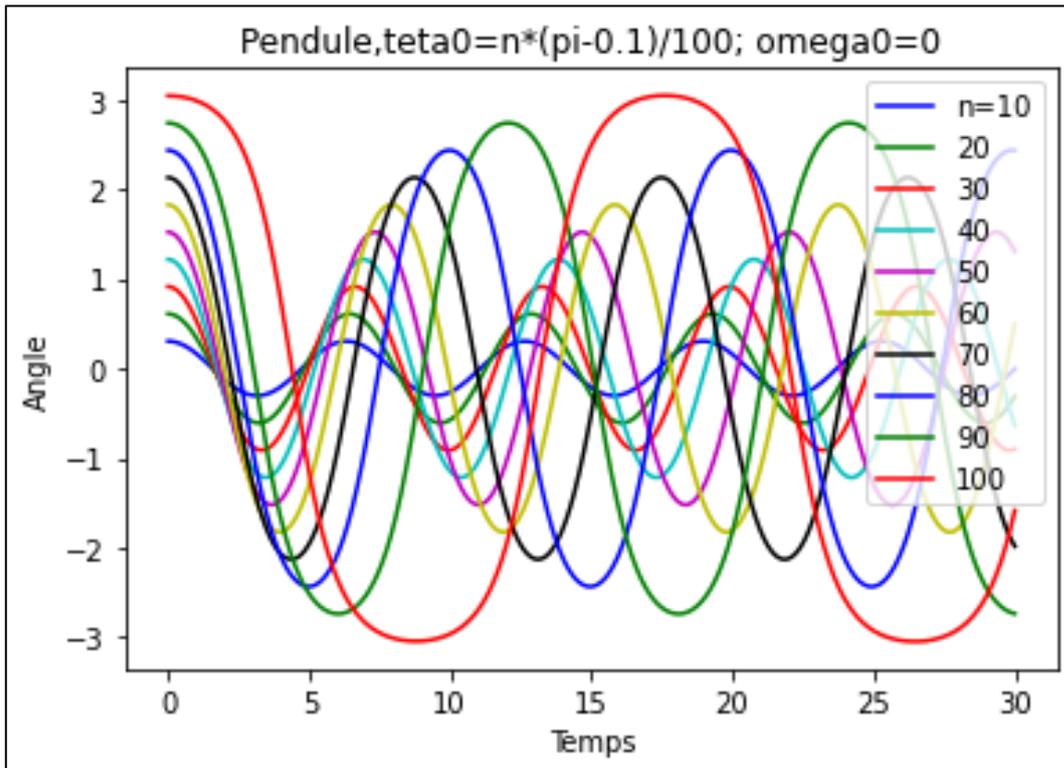
$$\left\{ \theta(t=0) = 120^\circ, \dot{\theta}(t=0) = 0 \right\}, \text{ cas du pendule non-linéaire.}$$



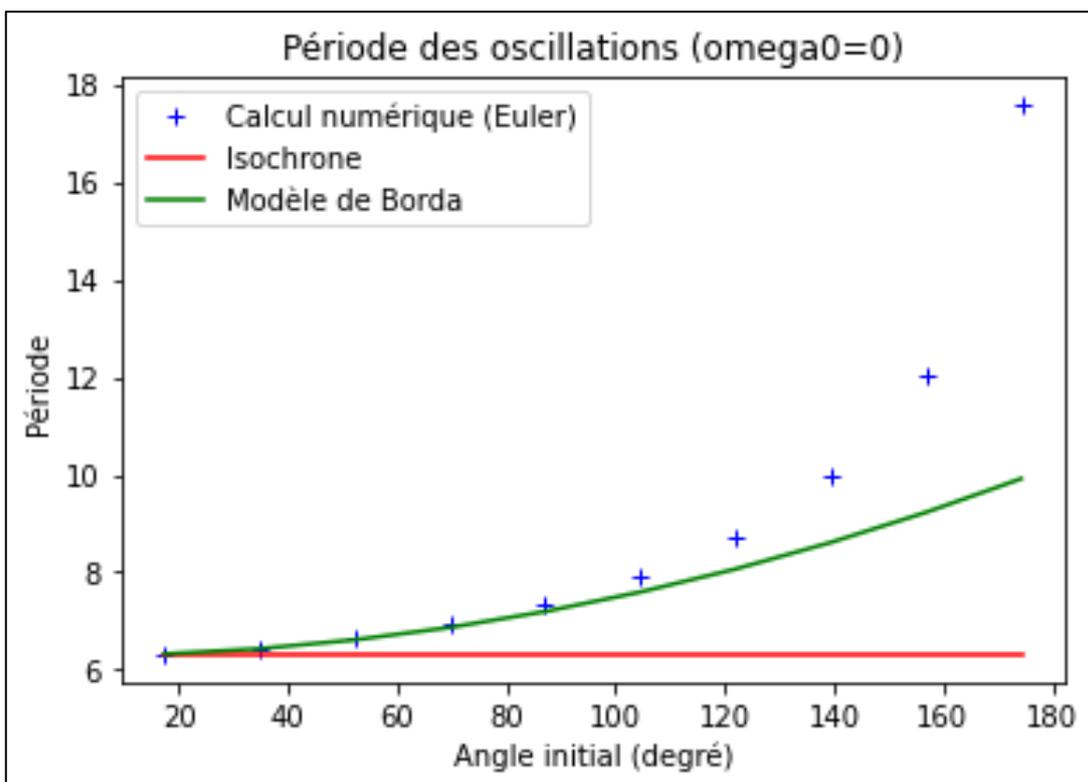
Les codes Python correspondant à ces courbes se trouvent en annexe.

Dans le cas des grands angles (grandes amplitudes), Le portrait de phase n'est plus une ellipse, sa forme est plus complexe. **Les oscillations ne sont plus isochrones, la pulsation des oscillations dépend de l'amplitude des oscillations.**

Le graphe ci-dessous montre l'évolution des oscillations du pendule pour différents angles initiaux (vitesse angulaire initiale nulle). On voit clairement que la période des oscillations varie en fonction de l'angle initial et augmente avec ce dernier.



Pour voir cela de façon plus claire, le graphe ci-dessous montre l'évolution de la période des oscillations en fonction de l'angle initial dans trois cas : le cas de l'oscillateur harmonique idéal, le modèle de Borda (cf. code Python en annexe) et le calcul numérique avec la méthode d'Euler. Le pendule isochrone (harmonique) est une approximation valable uniquement aux petits angles.



1.4 Etude énergétique

a) Energie mécanique

Si l'on prend comme origine de l'énergie potentielle $E_p(x=0)=0$, on a

$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Comme $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, $v(t) = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$, ce qui

donne : $E_m = \frac{1}{2}mX_m^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$. Si l'on utilise le fait que

$X_m^2\omega_0^2 = X_m^2 \frac{k}{m}$ et que $\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$ on peut écrire finalement :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}kX_m^2$$

b) Equipartition de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique

D'après l'équation précédente, l'énergie mécanique est une constante du mouvement, on dit que le système est **conservatif** (il n'y a que des forces conservatives qui interviennent). Il n'y a aucune dissipation d'énergie étant donné que l'on n'a pris en compte aucune force de frottement. Il y a donc **un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle** au cours de l'évolution du système comme cela est illustré sur la figure du paragraphe 1-1 et sur la figure ci-dessous (A correspond à l'amplitude que l'on a notée X_m , U est l'énergie potentielle et K l'énergie cinétique).

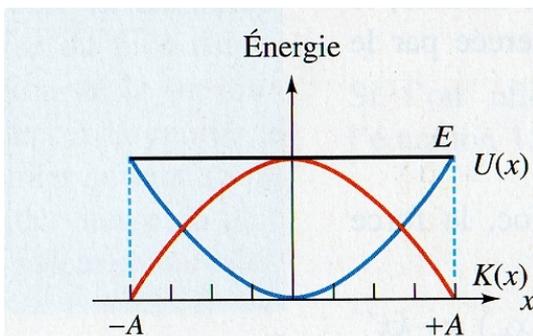


Figure 15.9 ▲

Les variations de l'énergie cinétique (courbe rouge), de l'énergie potentielle (courbe bleue) et de l'énergie mécanique (trait noir) en fonction de la position.

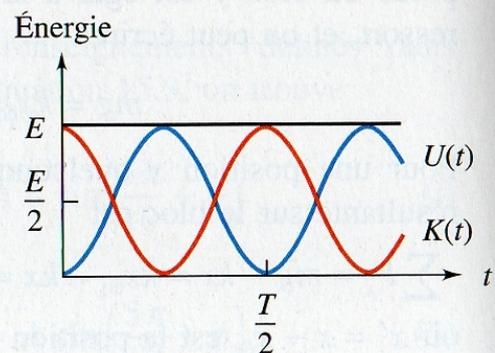


Figure 15.10 ▲

Les variations de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique en fonction du temps.

A un instant t on a : $E_p(t) = \frac{1}{2}kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$ et $E_c(t) = \frac{1}{2}kX_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$.

On cherche à calculer la valeur moyenne au cours du temps de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

On définit en mathématiques la moyenne temporelle $\langle f \rangle$ d'une fonction $f(t)$ par

$$\langle f \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} f(t) dt \text{ de façon générale et par } \langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) dt \text{ si la fonction est périodique de}$$

période T . Dans notre cas $E_p(t)$ et $E_c(t)$ sont périodiques de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Il est facile de

montrer que :

$$\langle \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \rangle = \left\langle \frac{1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \text{ et } \langle \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \rangle = \left\langle \frac{1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}.$$

On obtient ainsi :

$$\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{4} k X_m^2 = \frac{E_m}{2}$$

On constate qu'il y a en moyenne sur une période équipartition entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

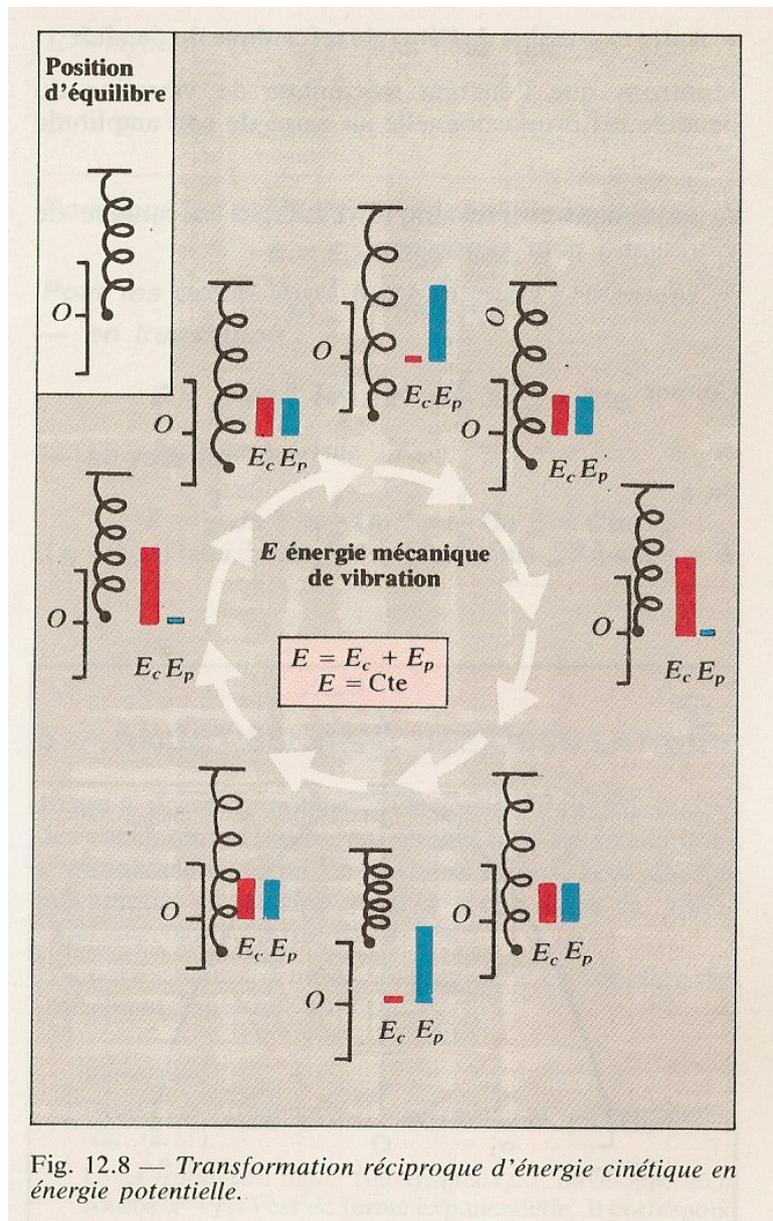


Fig. 12.8 — Transformation réciproque d'énergie cinétique en énergie potentielle.

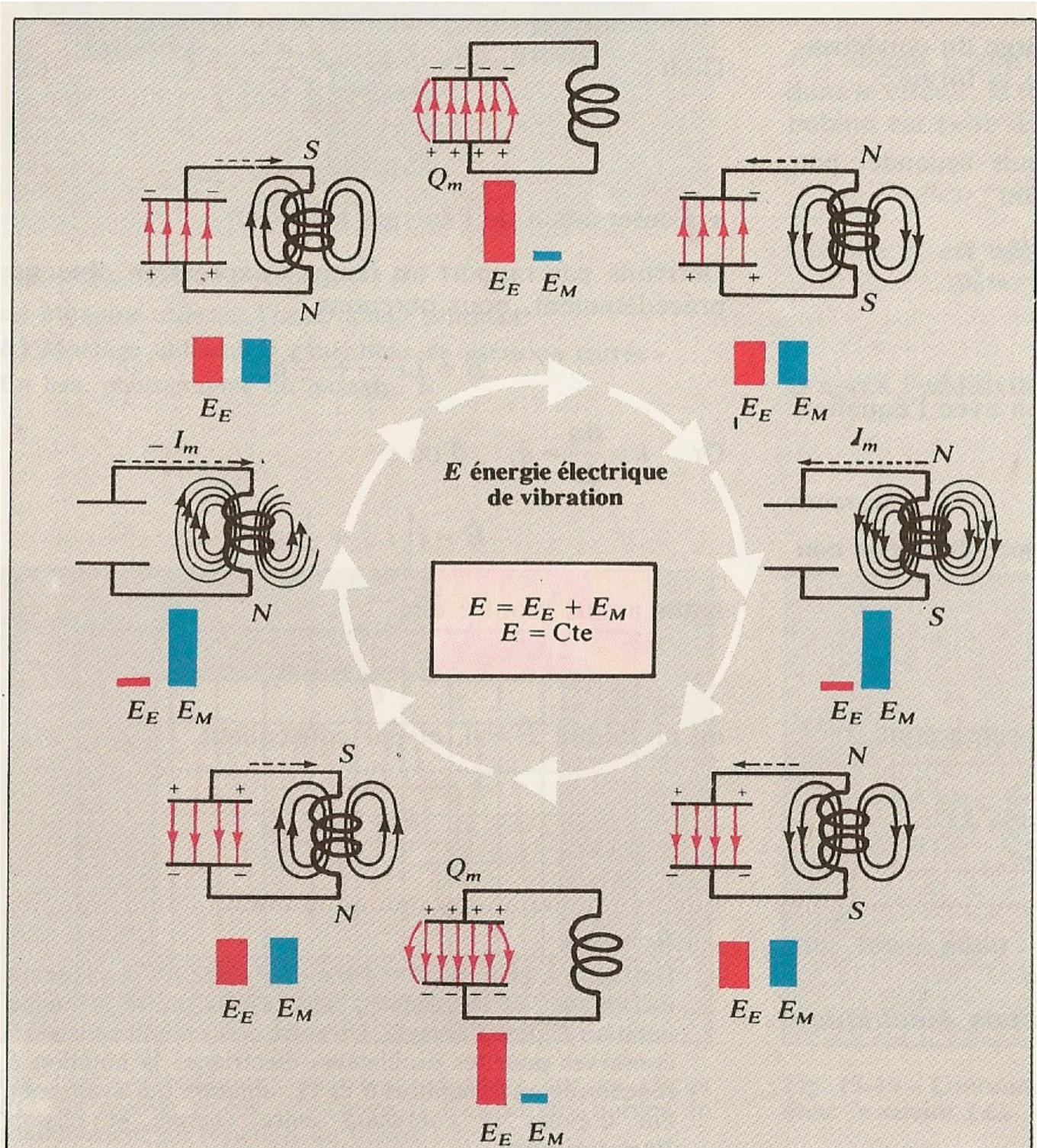


Fig. 13.5 — Transformation réciproque des énergies potentielles électrostatique et magnétique dans un circuit LC.

Lorsque l'énergie potentielle électrostatique est maximale (plateaux du condensateur chargés au maximum), l'énergie potentielle magnétique est nulle (pas de circulation de porteurs de charge, ici les électrons libres); et vice versa.

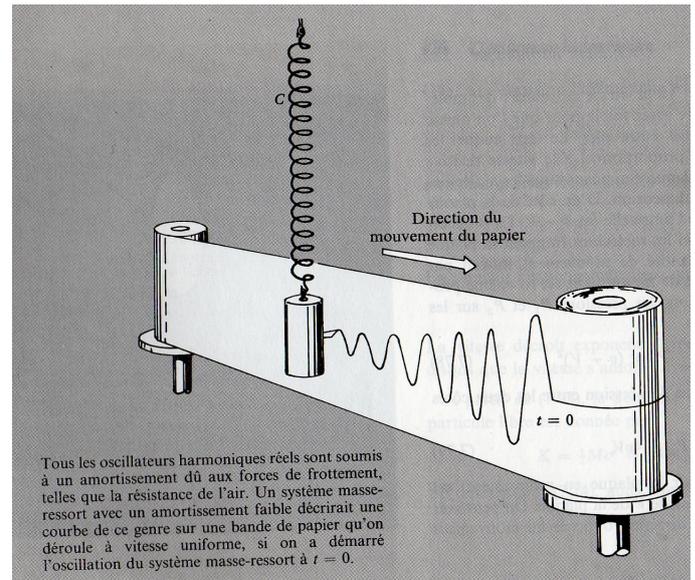
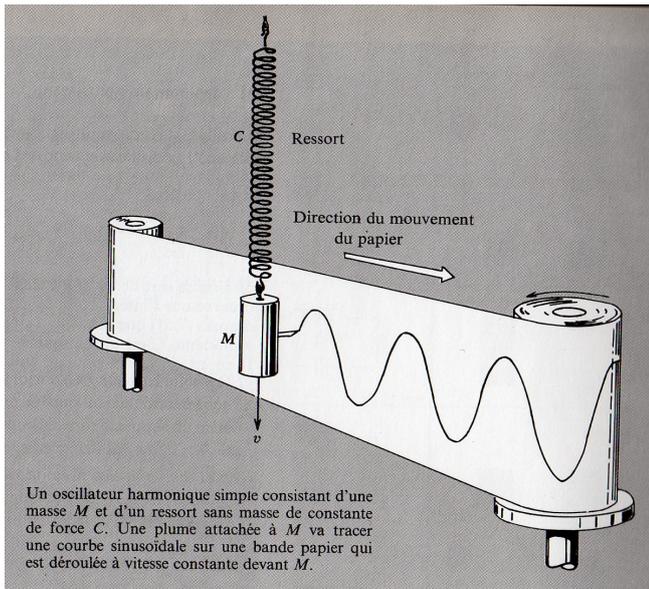
II – Oscillations libres d'un oscillateur amorti

2.1 Oscillateur libre amorti par frottement fluide

Pour se rapprocher de la réalité, il faut tenir compte des pertes d'énergie provoquées par les diverses forces de frottement. Nous allons modéliser ces dernières par une force de frottement

fluide du type $\vec{f}_{\text{fluide}} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{i}$ (on travaille à une dimension), h étant une constante.

Les deux figures ci-dessous illustrent de façon qualitative la différence de comportement entre un système physique (masse+ressort) ou l'on ne tient pas compte des frottements et le même système lorsque ces derniers sont prises en compte.



L'équation du mouvement sur l'axe (Ox) devient (par application du principe fondamental de la

dynamique) $m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}$.

Nous allons réécrire cette équation sous trois formes dites **canoniques** que l'on rencontre habituellement. En effet, l'équation canonique s'écrit de façon identique quel que soit le domaine physique auquel elle s'applique. De plus l'écriture sous forme canonique permet de faire apparaître des grandeurs physiques caractéristiques du problème étudié. On écrira donc :

$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, couple (ω_0, τ)	$\omega_0 \equiv$ pulsation propre, $\tau \equiv$ temps de relaxation
$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, couple $(\omega_0, 2\beta)$	$2\beta \equiv \frac{1}{\tau} =$ coefficient d'amortissement
$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, couple (ω_0, Q)	$Q \equiv \omega_0\tau =$ facteur de qualité (sans dimension)

5.1 Étude expérimentale

Nous limitons volontairement notre étude à un amortissement par frottement visqueux (frottement dans un fluide) du pendule élastique vertical. Le palet est disposé à l'intérieur d'un récipient pouvant contenir différents fluides.

Munissons d'un palet l'extrémité du solide suspendu au ressort (fig. 12.12).

L'étude est résumée dans le tableau suivant où les différents enregistrements sont présentés :

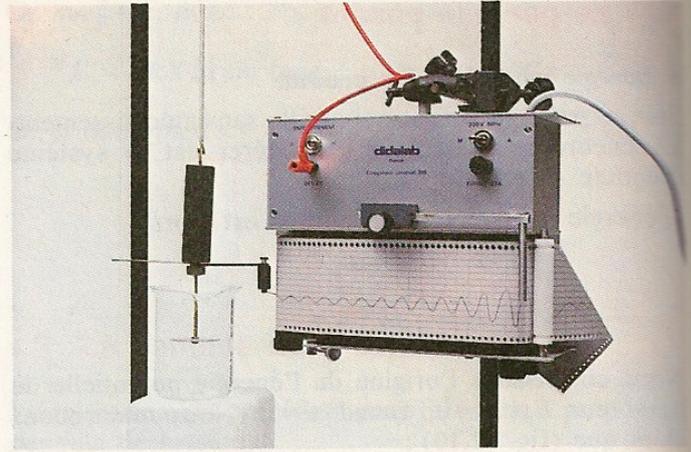


Fig. 12.12 — Dispositif expérimental de l'étude de l'amortissement du pendule élastique vertical.

RÉGIME	ENREGISTREMENT	AMORTISSEMENT
Périodique		<p>Amortissement négligeable</p> <p>Le récipient contient de l'air. L'amortissement est très faible, l'amplitude des oscillations décroît très lentement. Le mouvement est pratiquement sinusoïdal; notons la période T_0.</p>
Pseudo-périodique		<p>Amortissement non négligeable</p> <p>Le récipient contient de l'eau. L'amplitude des oscillations diminue constamment pour devenir pratiquement nulle après une dizaine de périodes; T est légèrement supérieur à T_0.</p>
Apériodique		<p>Amortissement critique</p> <p>Le récipient contient un sirop de sucre épais. L'amortissement est tel que le mouvement du pendule s'arrête juste à la position d'équilibre sans la dépasser.</p>
		<p>Amortissement sur-critique</p> <p>Le récipient contient de la poix. L'oscillateur atteint la position d'équilibre sans la dépasser au bout d'un temps relativement long (plusieurs fois T_0).</p>



Dans le cas de notre modèle d'oscillateur mécanique $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ et $\tau \equiv m/h$. Les expressions de ω_0 et de τ dépendent de la nature physique de l'oscillateur étudié. Par exemple, nous avons étudié le circuit RLC série qui constitue un oscillateur électrique et avons déterminé que $\omega_0 \equiv \sqrt{1/LC}$ et $\tau \equiv L/R$ pour ce système physique.

2.2 Solution de l'équation différentielle (équation d'évolution)

Dans la suite de ce chapitre, nous allons écrire l'équation différentielle sous la forme canonique $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (3) que nous allons chercher à résoudre. Il s'agit d'une équation différentielle de second ordre à coefficients constants. Avant toutes choses, lorsque $Q \rightarrow \infty$, on retrouve l'équation (1). **C'est toujours le terme devant \dot{x} qui traduit l'amortissement.**

On cherche une solution de la forme e^{rt} que l'on réinjecte dans l'équation (3). On arrive à l'équation caractéristique de la forme $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$. Il s'agit à présent d'une équation algébrique. Dans le cas général, r admet deux solutions r_1 et r_2 qui sont complexes ou réelles, ce qui donne:

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t},$$

où A_1 et A_2 sont des constantes (complexes conjuguées car $x(t)$ doit être réelle) que l'on détermine à partir des conditions initiales du problème.

2.3 Régime d'évolution

La nature physique d'évolution de $x(t)$ va dépendre du facteur de qualité Q donc de l'amortissement du système. En effet selon la valeur de Q , la nature des racines r_1 et r_2 sera différente.

a) Régime pseudo périodique : $Q > \frac{1}{2}$

Si $Q > \frac{1}{2}$ alors $\beta < \omega_0$. Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) < 0. \text{ On pose } \omega^2 \equiv \omega_0^2 - \beta^2 \text{ avec } \omega \text{ la pseudo-pulsation.}$$

$$\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{4\beta^2}{\omega_0^2} - 4 \right) = 4(\beta^2 - \omega_0^2) = -4\omega^2 < 0$$

On obtient :
$$\begin{cases} r_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - j2\omega}{2} = -\beta - j\omega \\ r_2 = -\beta + j\omega \end{cases}$$
 et finalement :

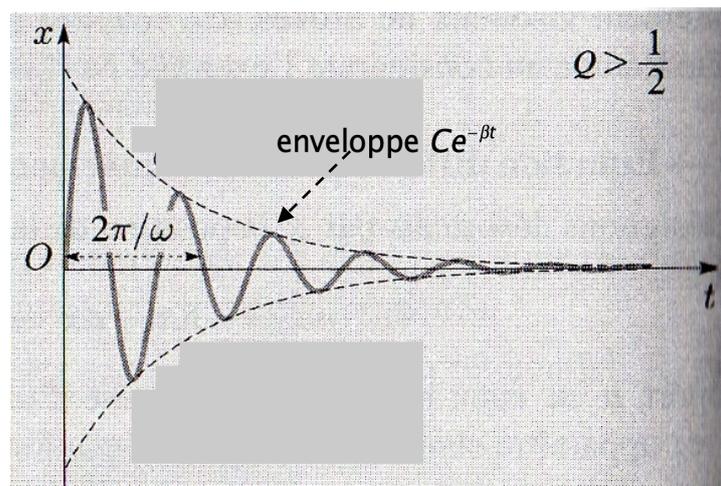
$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{-j\omega t} + A_2 e^{j\omega t}).$$

On sait que $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ et $\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$ ce qui permet de réécrire la solution sous

les formes équivalentes suivantes :

Si $Q > \frac{1}{2}$: $x(t) = \underbrace{e^{-\beta t}}_{\substack{\text{décroissante exponentielle de} \\ \text{l'amplitude.} \\ \text{(l'énergie du système décroît)}}} \underbrace{(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))}_{\text{facteur oscillant à la pseudo-pulsation } \omega} = C e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$

A , B , C et φ sont des constantes réelles que l'on détermine à partir des conditions initiales (position initiale X_0 et vitesse initiale V_0).



Le système oscille, mais sans être périodique à cause de l'amortissement, jusqu'à son retour à la position d'équilibre ($x = 0$). On a un mouvement pseudo-périodique de pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}}$$

b) Régime apériodique : $Q < \frac{1}{2}$

Si $Q < \frac{1}{2}$ alors $\beta > \omega_0$.

On pose $\omega^2 \equiv \beta^2 - \omega_0^2$ avec ω la **pseudo-pulsation**.

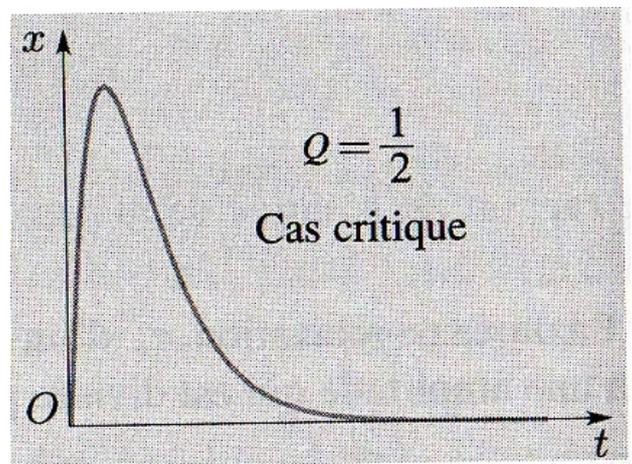
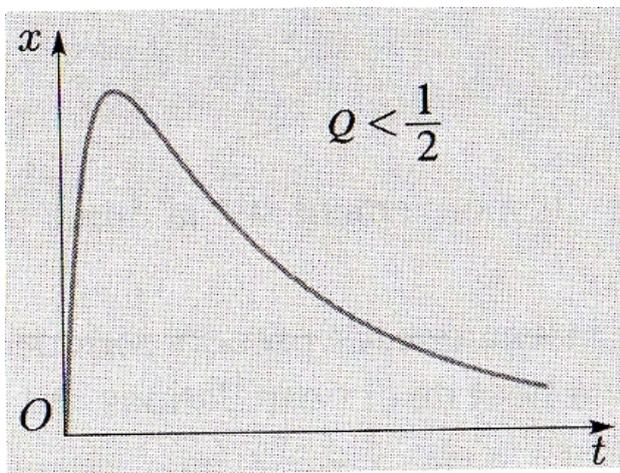
$$\Delta = 4\omega^2 > 0$$

On obtient : $\begin{cases} r_1 = -\beta - \omega \\ r_2 = -\beta + \omega \end{cases}$ et finalement :

$$\text{Si } Q < \frac{1}{2} : x(t) = e^{-\beta t} \underbrace{(A_1 e^{-\omega t} + A_2 e^{\omega t})}_{\text{termes purement exponentiels}}$$

A_1 et A_2 sont des constantes réelles que l'on détermine à partir des conditions initiales (position initiale X_0 et vitesse initiale V_0).

Le retour à l'équilibre du système se fait sans osciller car l'amortissement est devenu trop important.



c) Régime critique: $Q = \frac{1}{2}$

Si $Q = \frac{1}{2}$ alors $\beta = \omega_0$. $\Delta = 4(\alpha^2 - \omega_0^2) = 0$. On peut écrire $\ddot{x} + 2\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ soit

$\frac{d^2}{dt^2}(x(t)e^{\omega_0 t}) = 0$. $x(t)e^{\omega_0 t}$ est donc une fonction affine du temps $x(t)e^{\omega_0 t} = a + bt$ ce qui donne :

$$\text{Si } Q = \frac{1}{2} : x(t) = (a + bt)e^{-\omega_0 t}$$

a et b sont des constantes réelles que l'on détermine à partir des conditions initiales (position initiale X_0 et vitesse initiale V_0).

Le retour à l'équilibre du système se fait là encore sans osciller car l'amortissement est devenu trop important. Il s'agit du cas où **le retour à l'équilibre est le plus rapide**.

III – Etude énergétique de l'oscillateur amorti

3.1 Puissance des forces de frottement

On repart de l'équation différentielle du mouvement sous sa forme initiale: $m \ddot{x} + h \dot{x} + kx = 0$.

On multiplie par $v = \dot{x}$, ce qui donne après réarrangement : $\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2}_{\text{Energie mécanique}} \right] = -hv^2$.

On reconnaît entre crochets l'expression de l'énergie mécanique et globalement le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \underbrace{-hv^2 = f_{\text{fluide}} v}_{\text{puissance des forces non-conservatives}} < 0.$$

L'énergie mécanique décroît au cours du temps à cause de la puissance de la force de frottement fluide qui est négative. Nous verrons en thermodynamique ce qu'il advient de l'énergie qui disparaît.

3.2 Régime pseudo-périodique

Notre objectif dans cette partie est de donner une signification physique concrète du facteur de qualité. Nous allons nous placer en régime pseudo-périodique.

Nous allons montrer que

$$Q = \left| 2\pi \frac{E_m}{\Delta E_m} \right|$$

et interpréter ce résultat (**calculs au tableau**).

On peut dire que le facteur de qualité **Q** représente la **perte d'énergie relative du système par pseudo-période**. Plus le facteur de qualité est grand, moins le système perd de l'énergie (moins il est amorti) et inversement.

IV - Analogie électromagnéto-mécanique (suite et fin)

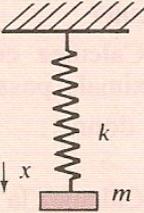
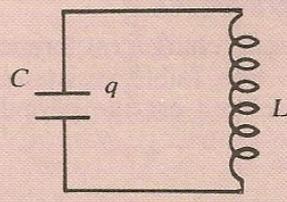
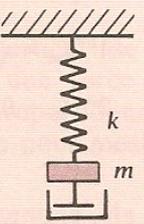
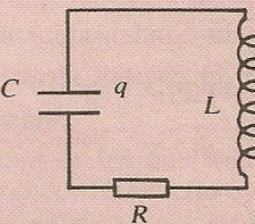
3.2 Comparaison d'un oscillateur mécanique et d'un circuit oscillant

Le tableau ci-dessous résume les comparaisons qui s'établissent entre les oscillateurs mécaniques et les oscillateurs électriques (circuits oscillants).

On s'aperçoit que

— la charge électrique q joue le rôle d'une variable de position x ;

— sa dérivée par rapport au temps, l'intensité du courant i , correspond à la dérivée \dot{x} , c'est-à-dire la vitesse du solide v .

SYSTÈME		OSCILLATEUR MÉCANIQUE	CIRCUIT OSCILLANT
Non amorti	Équation différentielle	 $m\ddot{x} + kx = 0$	 $L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$
	Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
	Équation de l'oscillation	$x = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$	$q = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$
	Énergie à l'instant t	$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ $E = \text{Cte}$	$E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ $E = \text{Cte}$
	Autres expressions de l'énergie d'oscillation	Énergie cinétique maximale $E = \frac{1}{2}m v_m^2$ Énergie potentielle d'élasticité maximale $E = \frac{1}{2}k X_m^2$	Énergie potentielle magnétique maximale $E = \frac{1}{2}L i_m^2$ Énergie potentielle électrostatique maximale $E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}$
Amorti	Équation différentielle	 $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ $-kx - \mu v = m\ddot{x}$ $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$	 $\Sigma u = u_B$ $\frac{q}{C} + Ri = -L \frac{di}{dt}$ $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$
	Différents types d'amortissement	Voir le tableau de la page 160	Voir le tableau de la page 172
Analogie entre les différentes grandeurs mécaniques et électriques		m masse μ coefficient de frottement visqueux k coefficient de raideur du ressort x élongation v vitesse F force	L inductance R résistance $\frac{1}{C}$, C capacité du condensateur q charge électrique i intensité u tension

3.1 Influence du facteur résistance

• Montage expérimental

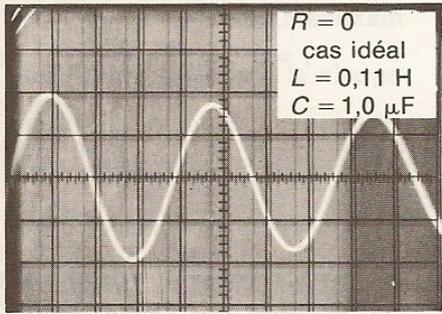
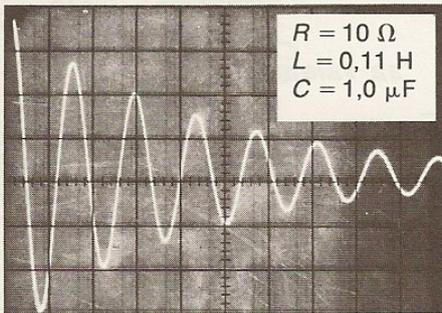
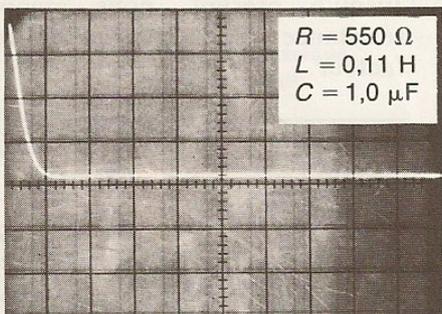
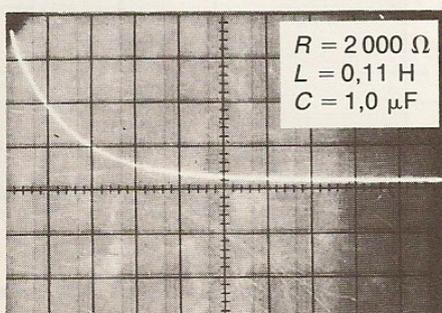
Insérons, dans le circuit oscillant LC utilisé précédemment, une boîte de conducteurs ohmiques à résistance variable (fig. 13.8). Les oscillations électriques existant

dans le circuit RLC ainsi constitué sont visualisées sur l'écran d'un oscilloscope.

La tension u_1 prise aux bornes du condensateur représente, à un coefficient de proportionnalité près, la charge d'un des plateaux du condensateur.

• Étude des différents cas

L'étude est résumée dans le tableau ci-dessous.

RÉGIME	ASPECT DE L'ÉCRAN	AMORTISSEMENT
Périodique		<p>Amortissement nul</p> <p>$R = 0$. La fonction tension aux bornes du condensateur est périodique et pratiquement sinusoïdale. Notons sa période T_0.</p>
Pseudo-périodique		<p>Amortissement non négligable</p> <p>$R < R_c$. L'amplitude des oscillations de la fonction tension décroît constamment. Les oscillations sont pseudo-périodiques : T est légèrement supérieur à T_0.</p>
Aperiodique		<p>Amortissement critique</p> <p>$R = R_c$. La tension aux bornes du condensateur s'annule sans changer de signe. C'est un cas d'amortissement utilisé pour le réglage de certains appareils de mesure tels que le galvanomètre balistique.</p>
		<p>Amortissement sur-critique</p> <p>$R > R_c$. La tension aux bornes du condensateur atteint la tension nulle après un temps relativement long par rapport à T_0.</p>

Code Python pour la résolution numérique des équations différentielles par la méthode d'Euler dans le cas du pendule simple

```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def pendule(T,n,theta0,omega0,alpha):
    dt=T/float(n)
    t=np.linspace(0,T,n+1)
    omega=np.zeros(n+1)
    theta=np.zeros(n+1)
    omega[0]=omega0
    theta[0]=theta0
    for k in range (n):
        theta[k+1]=theta[k]+dt*omega[k]
        omega[k+1]=omega[k]-alpha*dt*np.sin(theta[k])
    return theta, omega, t

n=50000
T=10
omega0=0
theta0=10*pi/180
alpha=5

theta, omega, t = pendule(T,n,theta0,omega0,alpha)

plt.subplot(2,1,1)
plt.xlabel('t',size=10)
plt.ylabel('angle',size=10)
plt.plot(t,theta, 'r-',markersize=3)
plt.title('Pendule simple,resolution numerique Euler: theta0=10°, omega0=0', size=8)
plt.xticks(size=8)
plt.yticks(size=8)

plt.subplot(2,1,2)
plt.xlabel('t',size=10)
plt.ylabel('vitesse angulaire',size=10)
plt.plot(t,omega, 'b-',markersize=3)
plt.xticks(size=8)
plt.yticks(size=8)
plt.show()

plt.plot(theta,omega, 'g-',markersize=3)
plt.xlabel('angle',size=10)
plt.ylabel('vitesse angulaire',size=10)
plt.title('Pendule simple,resolution numerique Euler: theta0=10°, omega0=0',size=8)
plt.legend(['Portrait de phase'],fontsize=10)
plt.xticks(size=8)
plt.yticks(size=8)
plt.show()
```

initial

```
1  from math import *
2  import numpy as np
3  import matplotlib.pyplot as plt
4  from scipy.optimize import bisect
5
6  def euler_R(F, U0, t):
7      n=len(t)-1
8      h=(t[n]-t[0])/n
9      U=np.zeros((len(t),2))
10     U[0]=U0
11     for k in range (n):
12         U[k+1]=U[k]+h*F(U[k],t[k])
13     return U
14
15     def F_pendule(U,t):
16         teta,omega=U
17         f_teta=omega
18         f_omega=-(w0**2)*sin(teta)
19         return np.array([f_teta, f_omega])
20
21     def periode(t,teta):
22         i=0
23         while teta[i]*teta[i+1]>0:
24             i+=1
25         j=i+1
26         while teta[j]*teta[j+1]>0:
27             j+=1
28         return 2*(t[j]-t[i])
29
30     w0=1
31     n=[10,20,30,40,50,60,70,80,90,100]
32     #n=[10,90]
33     T=[]
34     teta0=[]
35     teta=[]
36     omega=[]
37
38     for k in n:
39         t=np.linspace(0,30,500000)
40         U0=[k*(pi-0.1)/100, 0]
41         teta0.append(k*(pi-0.1)/100)
42         evolution=euler_R(F_pendule,U0,t)
43         teta.append(evolution[:,0])
44         omega.append(evolution[:,1])
45
46     for angle in teta:
47         T.append(periode(t,angle))
```

```

48 couleurs=['b','g','r','c','m','y','k','b','g','r']
49 #couleurs=['b','g']
50
51 for i,c in enumerate(couleurs):
52     #i = couleurs.index(c)
53     plt.figure(1)
54     plt.plot(t,teta[i],c+'-')
55     plt.xlabel('Temps', size=10)
56     plt.ylabel('Angle',size=10)
57     plt.title('Pendule,teta0=n*(pi-0.1)/100; omega0=0')
58     plt.legend(['n=10','20','30','40','50','60','70','80','90','100'],fontsize=10)
59
60 T_isochrone=[2*pi/w0 for i in range(0,len(n))]
61 T_Borda=[(2*pi/w0)*(1+teta0[i]**2/16) for i in range(0,len(n))]
62 tetadegre=[(180/pi)*teta0[i] for i in range(0,len(n))]
63
64 plt.figure(2)
65 plt.plot(tetadegre,T,'b+')
66 plt.plot(tetadegre,T_isochrone,'r-')
67 plt.plot(tetadegre,T_Borda,'g-')
68 plt.xlabel('Angle initial (degré)', size=10)
69 plt.ylabel('Période',size=10)
70 plt.title('Période des oscillations (omega0=0)')
71 plt.legend(['Calcul numérique (Euler)', 'Isochrone', 'Modèle de Borda'],fontsize=10)
72
73 U1=[0,-2.01]
74 U2=[0,2.01]
75 temps=np.linspace(0,30,500000)
76 evolution1=euler_R(F_pendule,U1,temps)
77 teta1=evolution1[:,0]
78 omega1=evolution1[:,1]
79 evolution2=euler_R(F_pendule,U2,temps)
80 teta2=evolution2[:,0]
81 omega2=evolution2[:,1]
82
83 plt.figure(3)
84 plt.plot(temps,teta1,'b-')
85 plt.plot(temps,teta2,'r-')
86 plt.xlabel('Temps', size=10)
87 plt.ylabel('Angle',size=10)
88 plt.title('Pendule simple')
89 plt.legend(['teta0=0,omega0=-2.01','teta0=0,omega0=2.01'],fontsize=10)
90 plt.figure(4)
91 plt.plot(teta1,omega1,'b-')
92 plt.plot(teta2,omega2,'r-')
93 plt.xlabel('Teta', size=10)
94 plt.ylabel('Omega',size=10)
95 plt.title('Potrtrait de phase')
96 plt.legend(['teta0=0,omega0=-2.01','teta0=0,omega0=2.01'],fontsize=10)

```