OSCILLATION PARTIE 3 : OSCILLATIONS FORCEES ET RESONANCE EN MECANIQUE

«Nous ne sommes guère plus intelligents les uns que les autres.»

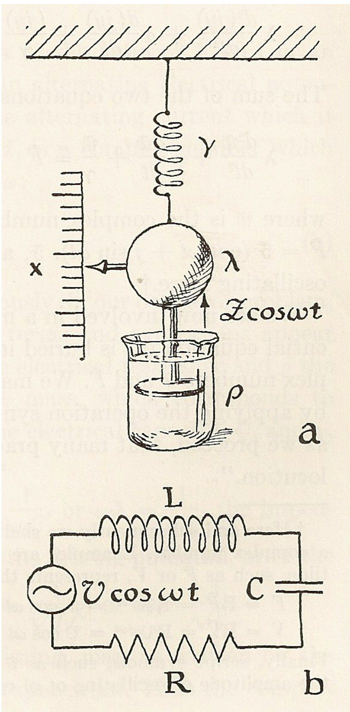
Richard Feynman

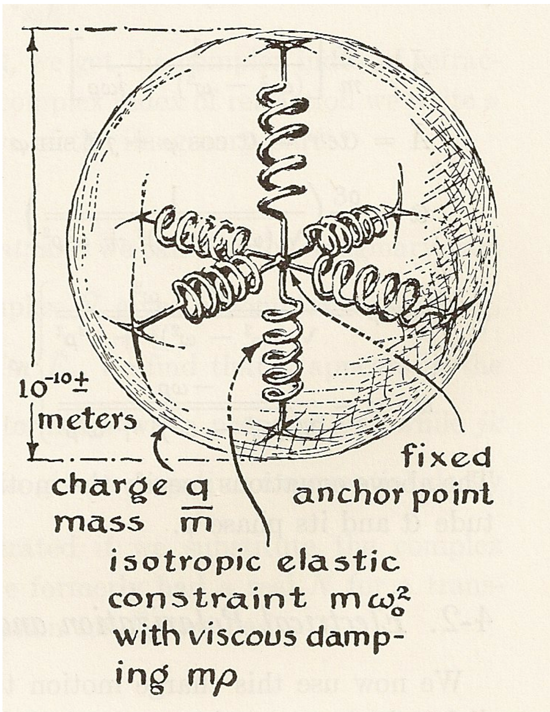
Rappel : ce que l'on a déjà étudié en mécanique au cours de cette année scolaire :

- La cinématique.
- La dynamique du point en référentiel galiléen.
- Puissance et énergie en référentiel galiléen.
- Les oscillateurs mécaniques libres.

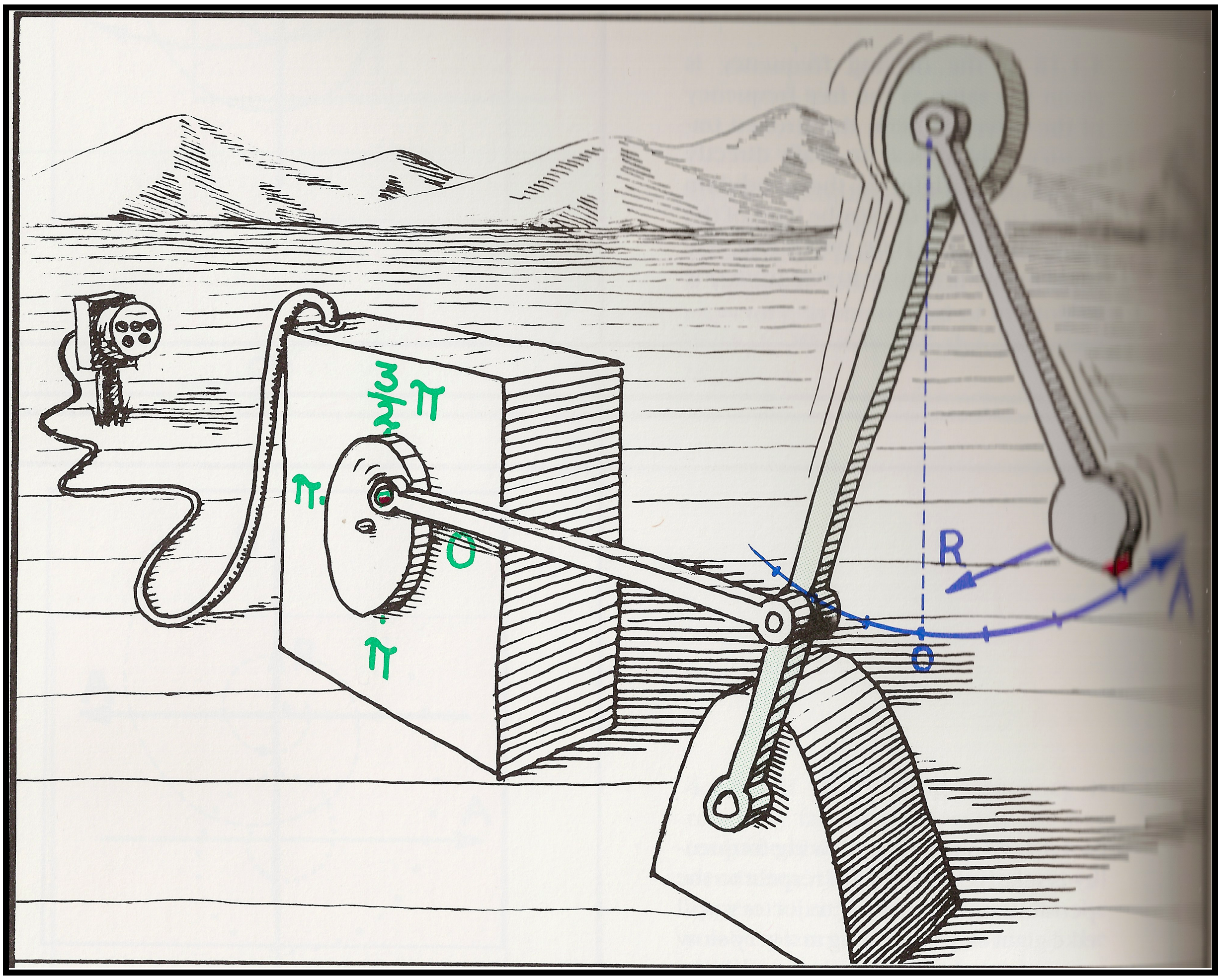
Nous allons continuer notre étude de l'oscillateur harmonique dans le cadre de la mécanique. Cette fois, ce dernier va être soumis à une excitation extérieure. Nous allons restreindre notre étude au cas d'une excitation sinusoïdale, on dit aussi harmonique (nous verrons pourquoi). Nous suivons la même démarche qu'en électrocinétique ; après l'étude des régimes libres, nous avons étudié les régimes forcés. Il existe une très forte analogie entre l'étude d'un circuit RLC en régime forcé et l'étude d'un oscillateur linéaire soumis à une excitation harmonique : les deux systèmes sont régis par la même équation différentielle du second ordre.

Le mouvement d'un pendule d'une horloge de grand-mère, le mouvement d'un enfant que l'on pousse sur une balançoire, le mouvement d'un amortisseur de voiture sur une route en mauvais état, l'oscillation d'un électron atomique soumis à un champ électrique sont quelques exemples d'oscillations forcées (cf. figure ci-dessous, modèles mécanique, électrique et optique).



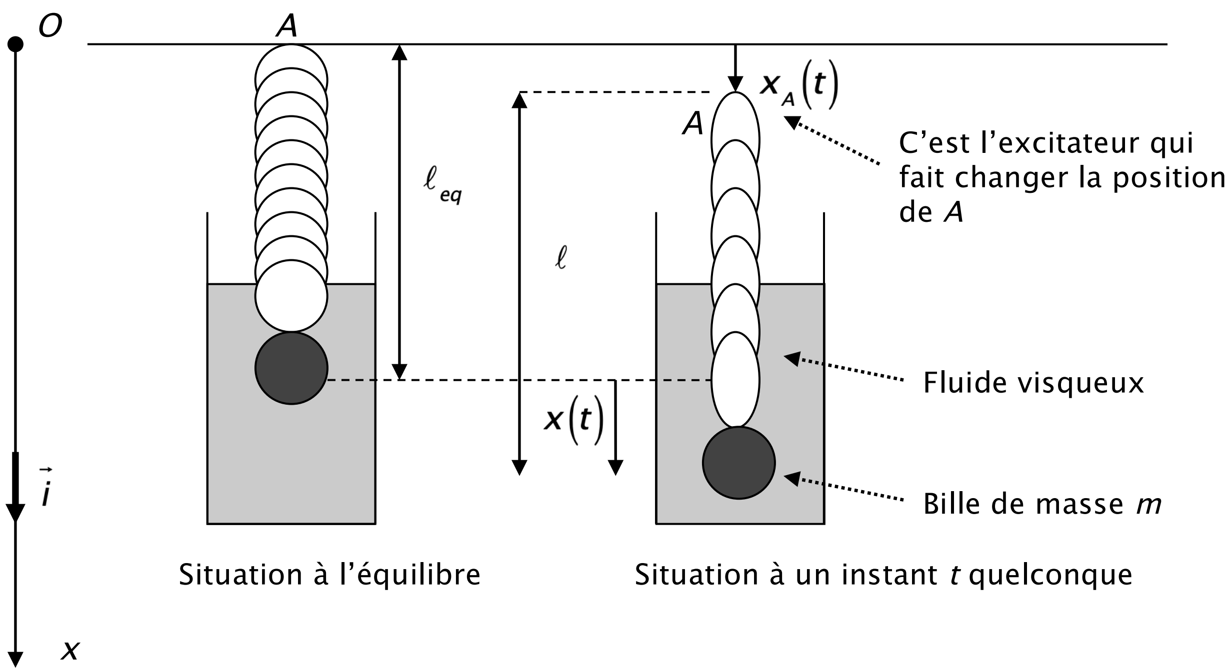


Figures extraites de Concepts of classical optics, par John Strong aux éditions W.H. Freeman Compagny, 1958, 692 p.



Figures extraites de Dynamics, The Geometry of Behavior, Second edition par Ralph H. Abraham et Christoper D. Shaw aux éditions Addison Wesley, 1992, 642 p.

I – Modèle mécanique



Système étudié :

La bille de masse m assimilée à un point ponctuel dans le référentiel galiléen du laboratoire.

Bilan des forces :

– le poids de la bille $m\vec{g}$

– la poussée d'Archimède $\vec{f_A}$

– force de rappel élastique du ressort $\vec{f_r} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u_x}$ avec ℓ_0 longueur à vide et k constante de raideur

– frottements fluides $\vec{f_v} = -h\dot{x}\vec{u_x}$ avec h coefficient de frottement fluide

Application du principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f_A} + \vec{f_r} + \vec{f_v}$$

Projection sur Ox (mouvement à une dimension) :

$$m\ddot{x} = mg + f_A - k(\ell - \ell_0) - h\dot{x}$$

Nous allons utiliser la situation au repos (équilibre) pour éliminer le poids et la poussée d'Archimède. En effet, au repos, $O = A$, on a :

$0 = mg + f_A - k(\ell_{eq} - \ell_0)$ et $\ell = \ell_{eq} + x(t) - x_A(t)$

$$\begin{array}{rl} & m\ddot{x} = mg + f_A - k(\ell - \ell_0) - h\dot{x} \\ - & 0 = mg + f_A - k(\ell_{eq} - \ell_0) \\ \hline & m\ddot{x} = -k(\ell - \ell_{eq}) - h\dot{x} \end{array}$$

Cette équation différentielle s'écrit :

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}x_A(t)}$$

On fait apparaître les grandeurs suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega_0 \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \text{pulsation propre du système} \\ Q \equiv \dfrac{m\omega_0}{h} = \text{facteur de qualité du système} \end{array}}$$

On écrit alors l'équation différentielle en $x(t)$ sous la forme canonique suivante :

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_A(t)}$$

Le second membre de cette équation n'est pas nul à cause du terme d'excitation. On retrouve le même type d'équation différentielle qu'en électrocinétique dans l'étude des régimes forcés.

II – Réponse à une excitation sinusoïdale

2.1 Régime libre, transitoire et forcé

La solution de l'équation différentielle est la somme de deux termes :

$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ avec :

$x_0(t) =$ solution générale de l'équation sans second membre = **solution du régime libre**,

$x_1(t) =$ solution particulière de l'équation avec second membre = **solution du régime forcé**.

Quand l'oscillateur est amorti, son régime libre décrit par $x_0(t)$, disparaît avec le temps.

Au bout de quelques $\tau = m/h$ (durée qui caractérise le régime transitoire), seul persiste le régime forcé $x_1(t)$.

Nous avons déjà étudié le régime transitoire dans un chapitre précédent de mécanique. Je vous rappelle que suivant la valeur du facteur de qualité, il existe trois types de régimes. Si $Q > 1/2$ il s'agit du régime **pseudo périodique**, si $Q < 1/2$ du **régime apériodique** et si $Q = 1/2$ du **régime critique**. Dans les trois cas, $x_0(t) \to 0$ au bout de quelques τ.Notre objectif à présent est de trouver $x_1(t)$ quand l'excitation est sinusoïdale, chose que l'on a déjà faite en électrocinétique. A présent, nous allons uniquement nous intéresser au régime permanent $x(t) = x_1(t)$.

2.2 Additivité des réponses. Analyse de Fourier

L'équation différentielle du mouvement que l'on doit étudier est **linéaire**. Cela signifie que si $x_i(t)$ est la réponse à une excitation $x_{Ai}(t)$ alors $x(t) = \sum_i x_i(t)$ a pour réponse $x_A(t) = \sum_i x_{Ai}(t)$.

Nous allons étudier la réponse à une excitation de la forme $x_A(t) = X_0 \cos(\omega t)$. D'après ce que nous avons vu en électrocinétique, nous devons chercher la solution (solution particulière de l'équation différentielle) sous la forme :

Solution du régime permanent

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

ce qui revient à déterminer l'amplitude du mouvement X_m et sa phase φ.

Vous verrez en PT (en mathématiques et en physique), que n'importe quelle fonction périodique du temps de période T (c'est-à-dire $f(t)=f(t+T)$) peut s'écrire comme une somme (infinie) de fonctions sinusoïdales (c'est-à-dire harmoniques). Ainsi, si je connais la réponse de mon système à une excitation sinusoïdale, je connais la réponse de ce dernier à n'importe quelle excitation périodique par linéarité.
On voit dès lors l'intérêt d'étudier la réponse à une excitation sinusoïdale.

2.3 Résolution

L'équation différentielle s'écrit avec l'excitation sinusoïdale :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx(t)}{dt}+\omega_0{}^2x(t)=\omega_0{}^2X_0\cos(\omega t)$$

On cherche la solution sous la forme $x(t)=X_m\cos(\omega t+\varphi)$. Il faut donc trouver l'amplitude du mouvement X_m et sa phase φ. Comme cela a été fait en électrocinétique, nous allons utiliser la méthode des complexes et travailler avec les amplitudes complexes :

$$x_A(t)=X_0\cos(\omega t)\rightarrow \underline{X_A}=X_0$$
$$x(t)=X_m\cos(\omega t+\varphi)\rightarrow \underline{X}=X_me^{j\varphi}$$
$$\frac{d}{dt}(\quad)\rightarrow \times j\omega(\quad)$$

L'équation différentielle devient une équation algébrique complexe :

$$-\omega^2\underline{X}+\frac{\omega_0}{Q}j\omega\underline{X}+\omega_0{}^2\underline{X}=\omega_0{}^2X_0$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2X_me^{j\varphi}+\frac{\omega_0}{Q}j\omega X_me^{j\varphi}+\omega_0{}^2X_me^{j\varphi}=\omega_0{}^2X_0$$

Cela nous donne :

$$\boxed{X_me^{j\varphi}=\frac{X_0}{(1-u^2)+\frac{j}{Q}u}\quad\text{avec } u=\frac{\omega}{\omega_0}}$$

On reconnaît un **filtre passe-bas d'ordre 2**. En effet on peut faire apparaître une fonction de transfert mécanique $\underline{H}(j\omega)\equiv \underline{X}/\underline{X_A}=X_me^{j\varphi}/X_0$ par analogie avec ce qui a été fait en électrocinétique.

III – Réponse harmonique en élongation

3.1 Réponse en amplitude

En mécanique, il n'est pas d'usage de travailler en échelle log et en décibel. Par égalité des modules, on a :

$$X_m = \frac{X_0}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$$

- basse fréquence $\omega \ll \omega_0$ $u \ll 1$ $X_m \to X_0$
- haute fréquence $\omega \gg \omega_0$ $u \gg 1$ $X_m \to 0$

On cherche u_r (où ω_r la pulsation de résonance) pour laquelle X_m est maximale (notée $X_m^{\max}$).

X_m est maximale quand $g(u) = \left(1-u^2\right)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2$ est minimale.

$\frac{dg(u)}{du} = 2\left(1-u^2\right)\left(-2u\right) + 2\frac{u}{Q^2} = 0 \Leftrightarrow u^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$ soit $u_r = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

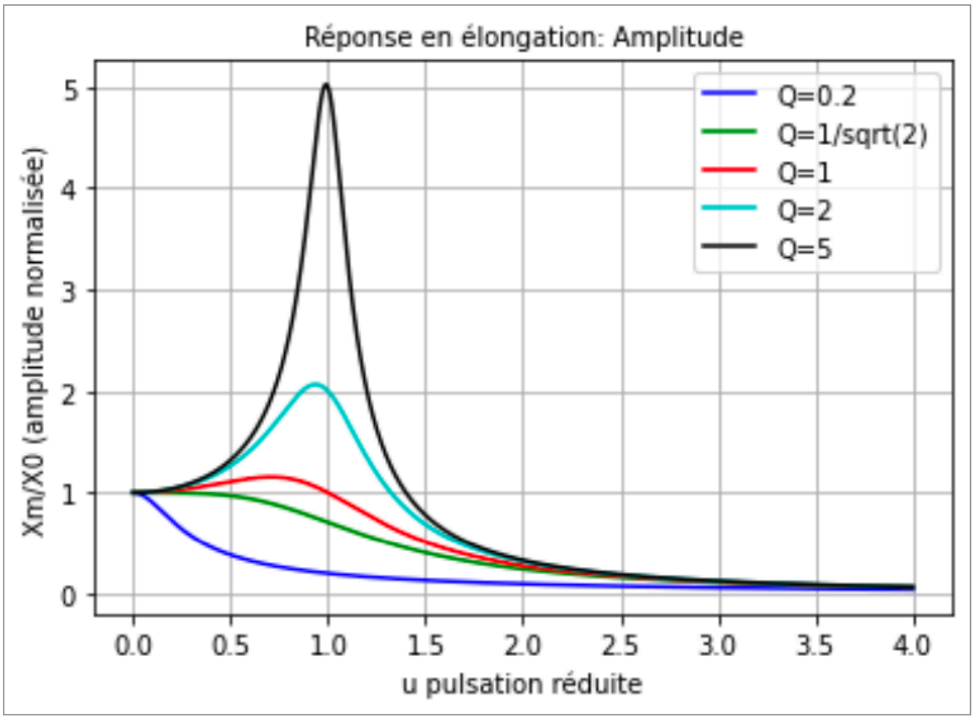
X_m est maximale quand $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il y a **résonance en élongation**. Dans ce cas $X_m^{\max} = \frac{Q\,X_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$.

On notera l'analogie suivante (voir partie V) :

Résonance en élongation $\Leftrightarrow$ ***Résonance en tension aux bornes de C (RLC série)***

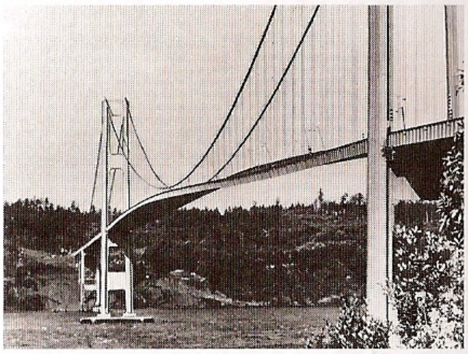
Ci-dessous est représenté $\frac{X_m}{X_0}$ en fonction de la pulsation réduite u et pour différents facteurs de qualité.

Pour les codes Python correspondant aux différentes courbes, ils se trouvent dans le chapitre « Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé, circuit RLC et résonance ».



Quand le facteur de qualité devient important, l'amplitude X_m peut prendre des valeurs très importantes. Dans le cas de systèmes mécaniques, cela peut entraîner la destruction du système (cf. illustrations de la figure suivante). De plus, dans le cas mécanique, pour de très fortes élongations, le modèle linéaire de la force de rappel élastique n'est plus valable.

FIGURE 14–25 (a) Large-amplitude oscillations of the Tacoma Narrows Bridge, due to gusty winds, led to its collapse (1940). (b) Collapse of a freeway in California, due to the 1989 earthquake.



(a)

(b)

FIGURE 14–24 This goblet breaks as it vibrates in resonance to a trumpet call.

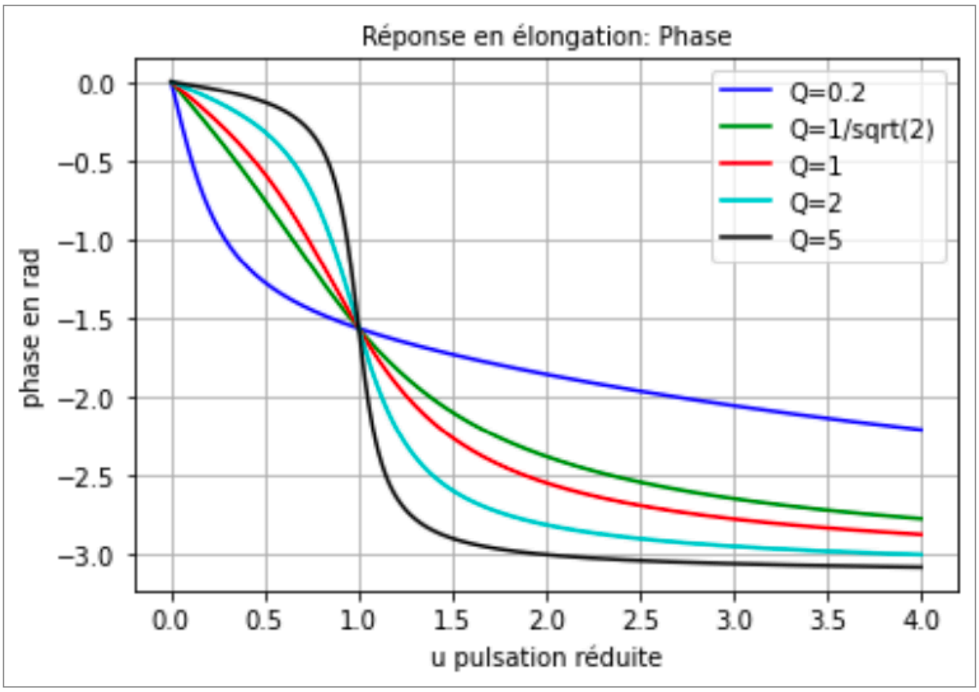
3.2 Réponse en phase

L'égalité des phases donne :

$\varphi = \arg\left(\dfrac{X_0}{\left(1-u^2\right)+\dfrac{j}{Q}u}\right) = -\arg\left(\left(1-u^2\right)+\dfrac{j}{Q}u\right) = -\arctan\left(\dfrac{u}{Q(1-u^2)}\right)$ à . $\pm\pi$ près suivant le signe de $\left(1-u^2\right)$.

- basse fréquence $\omega \to 0$ $u \to 0$ $\varphi \to 0$ (ici $\left(1-u^2\right)$ est positif)
- haute fréquence $\omega \to \infty$ $u \to \infty$ $X_m e^{j\varphi} \simeq -\dfrac{X_0}{u^2}$ donc $\varphi = -\pi$ (ici $\left(1-u^2\right)$ est négatif)
- $u = 1$ $X_m e^{j\varphi} \simeq -j\,Q\,X_0$ donc $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

Ci-dessous est représenté φ en fonction de la pulsation réduite u et pour différents facteurs de qualité Q.



IV – Réponse harmonique en vitesse

On s'intéresse désormais à la réponse en vitesse du système. La vitesse $v(t)$ est de la forme $v(t) = V_m\cos\left(\omega t+\psi\right)$. Comme $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, on a en notation complexe : $\underline{V} = j\omega\underline{X}$. Cela nous donne :

$$\boxed{V_m e^{j\psi} = j\omega X_m e^{j\varphi} = Q\,X_0\,\omega_0\,\frac{\dfrac{j}{Q}u}{\left(1-u^2\right)+\dfrac{j}{Q}u}}$$

On reconnaît un **filtre passe-bande d'ordre 2**. En effet, on peut faire apparaître une fonction de transfert mécanique $\underline{H}(j\omega) = \underline{V}/\underline{X}_A = V_m e^{j\psi}/X_0$ par analogie avec ce qui a été fait en électrocinétique.

4.1 Réponse en amplitude

Par égalité des modules, on a : $V_m = Q X_0 \omega_0 \dfrac{\dfrac{u}{Q}}{\sqrt{\left(1-u^2\right)^2 + \left(\dfrac{u}{Q}\right)^2}} = Q X_0 \omega_0 \dfrac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(u-\dfrac{1}{u}\right)^2}}$

- basse fréquence $\omega \to 0$ $u \to 0$ $V_m \to 0$
- haute fréquence $\omega \to \infty$ $u \to \infty$ $V_m \to 0$
- $u = 1$ $V_m = V_m^{\max} = QX_0\omega_0$

Quand $\omega = \omega_0 = \omega_r$ et ceci pour tout Q,. Il y a **résonance en vitesse.**

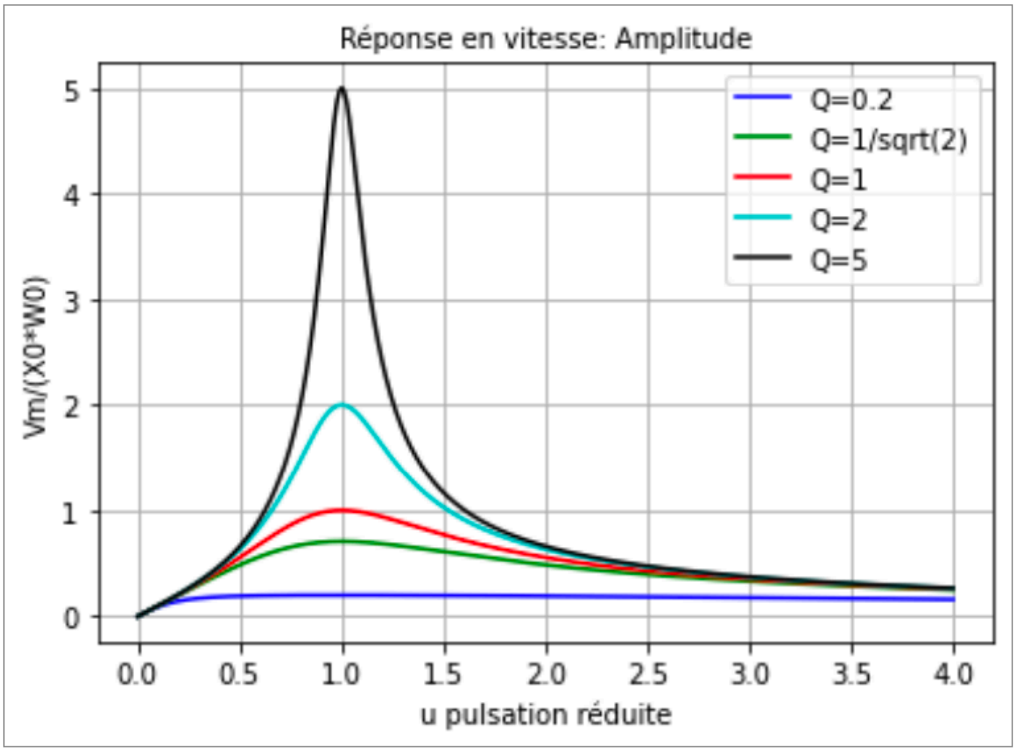
Dans ce cas $V_m^{\max} = QX_0\omega_0$.

On notera l'analogie suivante (voir partie III) :

Résonance en vitesse $\Leftrightarrow$ ***Résonance en intensité (RLC série)***

Quand Q augmente, la résonance est de plus en plus marquée.

Ci-dessous est représenté $\dfrac{V_m}{\omega_0 X_0}$ en fonction de la pulsation réduite u et pour différents facteurs de qualité Q.



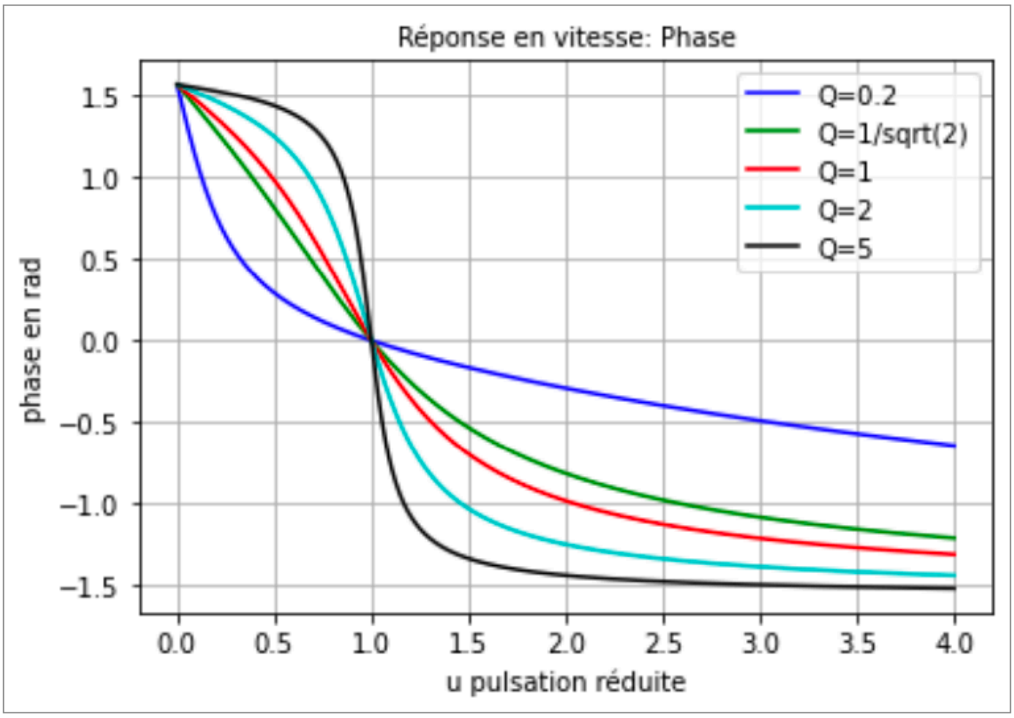
4.2 Réponse en phase

L'égalité des phases donne : $\psi = \dfrac{\pi}{2} + \varphi$.

• basse fréquence $\omega \to 0 \quad u \to 0 \quad \psi \to \dfrac{\pi}{2}$ • haute fréquence $\omega \to \infty \quad u \to \infty \quad \psi \to -\dfrac{\pi}{2}$

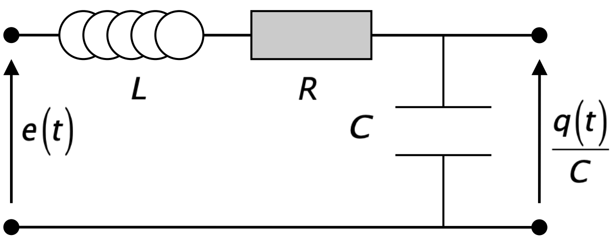
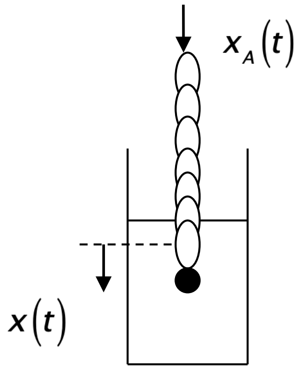
• $u = 1 \quad \omega = \omega_0 \quad \psi = 0$

Ci-dessous est réprésenté ψ en fonction de la pulsation réduite u et pour différentes valeurs du facteur de qualité Q.



V –Analogie électromécanique

Il y a analogie entre deux systèmes physiques s'ils sont régis par les mêmes équations différentielles.

ELECTROCINETIQUE	MECANIQUE
	
$L\dfrac{d^2q(t)}{dt^2}+R\dfrac{dq(t)}{dt}+\dfrac{1}{C}q(t)=e(t)$	$m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+h\dfrac{dx(t)}{dt}+kx(t)=k\,x_A(t)$
Charge q	Elongation x
Intensité $i=\dfrac{dq}{dt}$	Vitesse $v=\dfrac{dx}{dt}$
f.e.m $e(t)$	Force d'excitation $k\,x_A(t)$
Résistance R	Coefficient d'amortissement h
L	m
$\dfrac{1}{C}$	Raideur k
$u_L=L\dfrac{di}{dt}$	$m\dfrac{dv}{dt}$ (homogène à une force)
$E_{\text{magnétique}}=\dfrac{1}{2}Li^2$	$E_c=\dfrac{1}{2}mv^2$
$u_c=\dfrac{q}{C}$	kx (homogène à une force)
$E_{\text{condensateur}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$	$E_p=\dfrac{1}{2}k\,x^2$
$u_R=R\,i$	$h\,v$ (homogène à une force)
$P=R\,i^2$	$P=h\,v^2$