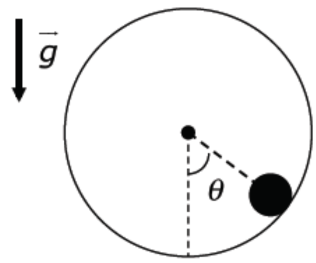
Mécanique série n°4 : Travail, énergie et équilibre

Exercice 1 : Equation du mouvement

Une bille de masse m est contrainte de se déplacer sur un cercle de rayon R sans frottement. La position de la bille est repérée par l'angle θ comme indiqué sur la figure.

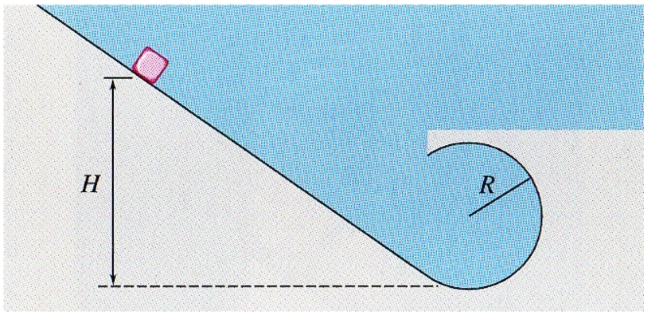


a) En utilisant une approche énergétique, établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$, c'est-à-dire l'équation du mouvement.

b) On ne prend en compte que les petites oscillations autour de la position d'équilibre. Résoudre l'équation différentielle de la question a) sachant, qu'à l'instant initial, la bille est lâchée de l'angle θ_0 avec une vitesse nulle.

Exercice 2 : Manège

Un ingénieur chargé de concevoir un manège de parc d'attractions considère une particule de masse m, lâchée d'une hauteur H, qui glisse sur une surface sans frottement se terminant par un cercle de rayon R.



a) Quelle est la valeur minimale de H pour que la particule ne quitte pas le cercle au point le plus haut du cercle ?

b) Si on lâche à une hauteur qui est le double de cette hauteur minimale, quel est le module de la force exercée par la piste sur la particule au point le plus élevé du cercle ?

Exercice 3 : Inuit sur un igloo

Un enfant inuit glisse sur un igloo hémisphérique verglacé (sans frottement) de rayon R. Il part du sommet avec une vitesse négligeable.

a) Soit une droite reliant l'enfant au point O. Quel est l'angle θ entre cette droite et la verticale lorsque l'enfant quitte la surface ?

<u>Indication</u> : **l'enfant quitte l'igloo quand la réaction normale est nulle.**

b) Si le frottement n'était pas nul, quitterait-il la surface en un point plus haut ou plus bas ?

Exercice 4 : Molécule diatomique

L'énergie potentielle dont dérive la force de liaison entre deux atomes d'une molécule diatomique peut-être exprimée de la façon suivante :

$$E_p(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6},$$

où a et b sont des constantes positives et x la distance entre les deux atomes.

a) Trouver la distance d'équilibre x_e entre les deux atomes.

b) Trouver la force entre les deux atomes.

c) Déterminer l'énergie minimum pour casser la molécule c'est-à-dire l'énergie nécessaire pour séparer les atomes de la position d'équilibre x_e à $x = \infty$.

Exercice 5 : Ressort et bloc

Un bloc de masse m=0,2 kg est maintenu contre un ressort sans lui être attaché. Le ressort, de constante raideur $k = 50\ \mathrm{N.m^{-1}}$ est comprimé de 20 cm (voir la figure). Lorsqu'on lâche le ressort, le bloc glisse de 50 cm vers le haut du plan incliné rugueux avant de s'arrêter.

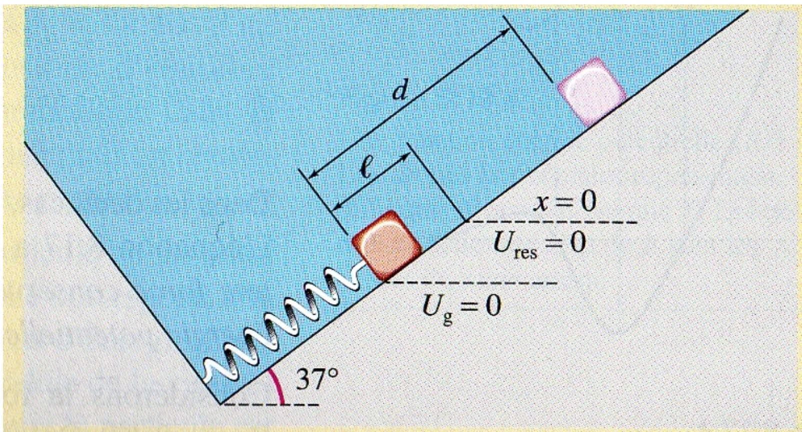


Figure 8.16 ▲
Dans cet exemple, les valeurs nulles de U_g et de U_{res} sont choisies en des points différents.

Trouver :

a) Le module de la force de frottement.

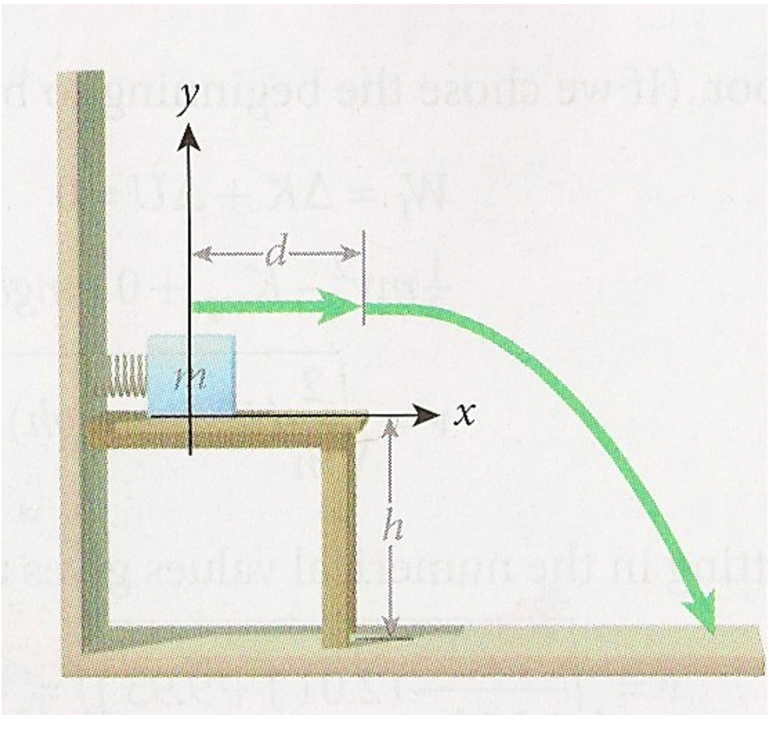
b) Le module de la vitesse du bloc à l'instant où il quitte le ressort.

c) Lorsque le bloc redescend, quelle est la compression maximale A ressort ?

Exercice 6 : Ressort, bloc et frottement solide

Un bloc de masse $m = 1{,}35$ kg, sur une table de hauteur $h = 0{,}750$ m, est poussé par un ressort de constante de raideur $k = 560\ \mathrm{N.m^{-1}}$ comprimé de 0,110 m et sur une distance $d = 0{,}65$ m.

Le coefficient de frottement dynamique entre la masse et la table vaut $\mu_D = 0{,}160$.
Quelle vitesse possède le bloque lorsqu'il touche le sol ?



Exercice 7 : Système de manipulation d'un colis

On considère le système de distribution de colis de la figure 4.56. Les roulements sont bien lubrifiés, on peut négliger les frottements solides.

a) Déterminez la compression minimale du ressort pour que le colis arrive en B (sur le tapis roulant) sans quitter le piste.

b) Finalement, déterminez la vitesse à laquelle le colis atteint le tapis roulant.

Exercice 8 : Satellite en orbite autour de la Terre

On considère un satellite en orbite autour de la Terre comme illustré sur la figure 4.52. Le centre de la Terre peut-être considéré comme l'origine du référentiel galiléen d'étude.

On a $R_P = 4{,}5\times10^7$ m et $R_A = 6{,}163\times10^7$ m.

La vitesse du satellite en *P* vaut $v_P = 3{,}2\times10^3$ m.s^{-1}. Déterminez la vitesse du satellite en *A*.

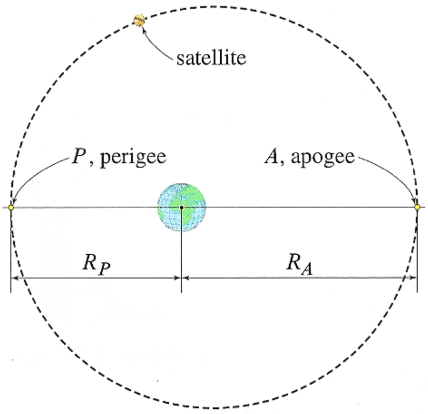


Figure P4.52

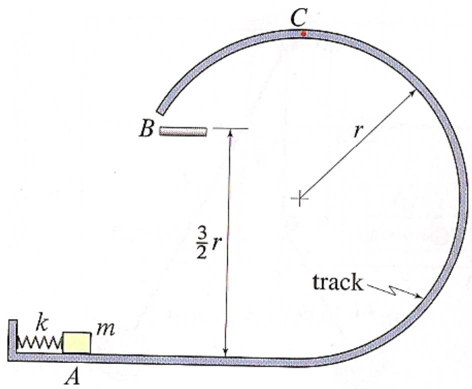


Figure P4.56

Exercice 9 : Force élastique, équilibre stable ou instable

Soit un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ de repère (*Ox*, *Oy*, *Oz*) de vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$. Une perle quasi ponctuelle *P*, de masse *M*, est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle (*C*), de rayon *a*. Le point *P* est attaché à un ressort (*R*) dont l'autre extrémité est fixée en O' (OO' = *a*).

Le ressort (*R*) possède une constante de raideur *k* et une longueur au repos ℓ_0. Le point *P* est repéré par l'angle $(Ox, OP) = \theta$ (Fig. 30).

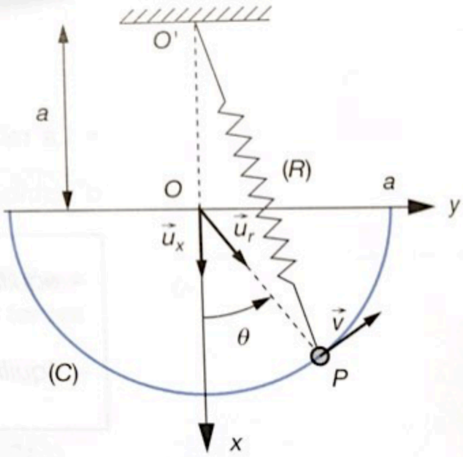


Figure 30

1. a) Exprimer $\overrightarrow{O'P}$ en fonction de *a* et θ dans la base polaire $(\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{a}, \vec{u}_\theta)$. En déduire l'expression du module *O'P*.

b) Exprimer la tension $\vec{T}$ du ressort en fonction de *a*, *k*, ℓ_0 et θ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

2. a) Comment s'exprime la vitesse $\vec{v}$ de *P* dans $\mathcal{R}_g$ en utilisant la base de projection $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$?

b) On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées sur la perle *P*.

Donner l'expression de $\vec{F}\cdot\vec{v}$ en fonction de θ et $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$.

En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ (à une constante près) dont dérive la force $\vec{F}$.

3. a) On suppose les relations suivantes entre les paramètres :

$$a = \frac{2Mg}{k} \quad \text{et} \quad \ell_0 = \sqrt{3}\left(a - \frac{Mg}{k}\right).$$

Quelles sont les positions d'équilibre θ_1 et θ_2 pour $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$?

b) Étudier la stabilité des équilibres obtenus.