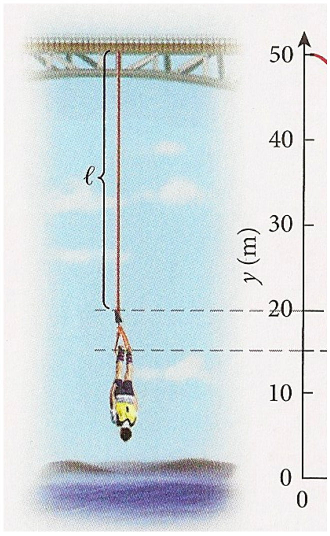
Mécanique série n°5 : Oscillation partie 2 et 3, oscillations mécaniques libres et forcées

Exercice 1 : Saut à l'élastique

Un pont au dessus d'une vallée profonde est idéal pour un saut à l'élastique. La première partie de ce saut consiste en une chute libre de même distance que la corde non étirée. On suppose que la hauteur du pont est de 50 m. La corde élastique non étirée a une longueur de 30 m et elle est étirée de 5 m par la personne de masse 70 kg. Ainsi la longueur à l'équilibre verticale de la corde est de 35 m. La corde élastique possède un facteur d'amortissement $\beta = 0{,}300\ \mathrm{s}^{-1}$.
Décrire le mouvement vertical du sauteur à l'élastique en fonction du temps c'est-à-dire déterminer entièrement $y(t)$.

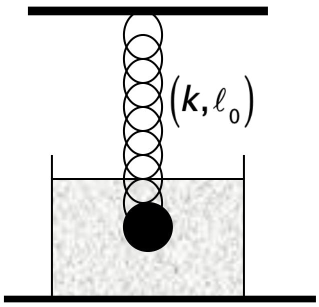


Exercice 2 : Détermination d'un coefficient de viscosité

Une sphère de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la formule de Stokes : $\vec{f} = -6\pi r\eta\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la bille.

a) Ecrire l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T.

b) Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, la période des oscillations est T_0. Déterminer le coefficient de viscosité η (avec la bonne unité) du liquide en fonction de m, r, T et T_0.



Exercice 3 : Le facteur de qualité en mécanique

On considère un dispositif mécanique composée d'une bille M, supposée ponctuelle, de masse m qui glisse sans frottements sur un axe horizontal (Ox). La bille est reliée à un ressort de constante de raideur $k > 0$ et de longueur à vide ℓ_0, maintenu fixe à son autre extrémité sur un mur vertical. La bille est également reliée à un dispositif d'amortissement, fixé au même mur, qui soumet la bille à une force de frottement fluide de la forme $\vec{f} = -h\vec{v}$.

On note O la position de la bille quand le ressort est à sa longueur à vide et on repère la position de la bille par $x = \overline{OM}$.

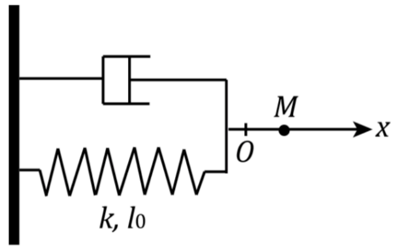
1) Faire un bilan des forces et justifier que le système n'est pas conservatif.

2) En appliquent le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, montrer que $\ddot{x} + (\omega_0/Q)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Préciser ω_0 et Q en fonction des paramètres du problème.

3) Quelle condition doit vérifier Q pour être en régime apériodique ? en régime critique ? en régime pseudo-périodique ?

4) Interprétation énergétique de Q : dans la suite, on suppose que $\omega \approx \omega_0$ et $Q \gg 1$ (cas d'un amortissement faible) et on se place dans le cas du régime pseudo-périodique : $x(t) = A\exp(-\omega_0 t/2Q)\cos(\omega t + \varphi)$.

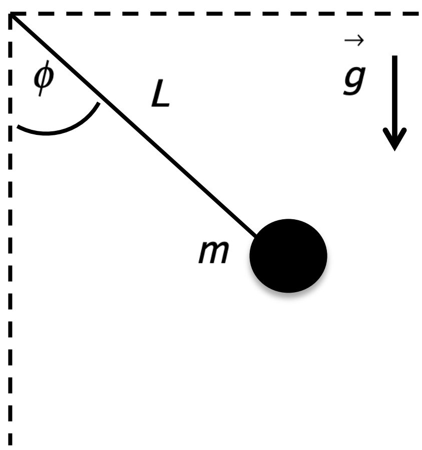
a) Quelle est l'expression de l'énergie potentielle $E_p(t)$? De l'énergie cinétique $E_c(t)$? ***b)*** Montrer que l'énergie mécanique $E_m(t)$ se met sous la forme : $E_m(t) = K_1\exp(-K_2 t)$. Exprimer K_1 et K_2. ***c)*** On définit la variation d'énergie mécanique par : $\Delta E_m(t) = \left|E_m(t+T) - E_m(t)\right|$ avec $T = 2\pi/\omega$. Quelle est la relation entre le facteur de qualité Q et $\Delta E_m(t)/E_m(t)$? Commenter.



Exercice 4 : Pendule simple en régime forcé

On considère un pendule simple de longueur L (cf. figure ci-contre) qui oscille dans un plan vertical. Il est soumis, en plus des forces usuelles (poids, tension du fil), à :

- Une force de frottement fluide de la forme $-b\vec{v}$.
- Une force d'excitation périodique de pulsation ω et de la forme $F(t) = F_0\cos(\omega t)$, colinéaire au vecteur vitesse.



a) Par la méthode de votre choix, montrer que l'équation différentielle qui gouverne l'évolution de $\phi(t)$ s'écrit :

$$\boxed{\ddot{\phi}(t) + \frac{b}{m}\dot{\phi}(t) + \frac{g}{L}\sin\phi(t) = \frac{F_0}{mL}\cos(\omega t)}$$

b) Nous ne savons pas résoudre analytiquement cette équation différentielle dans le cas général à cause du terme non linéaire $\sin\phi(t)$. Nous ne pouvons résoudre cette équation que de façon numérique et on peut montrer que ce pendule dit « simple » possède une dynamique d'une grande richesse et que ce système physique « élémentaire » peut engendrer le « chaos » (cf. TD d'informatique).

Nous allons donc supposer que l'angle $\phi(t)$ reste petit et écrire $\sin\phi \approx \phi$ (il faut pour cela que l'amplitude de l'excitation F_0 ne soit pas trop importante). Dans ce cas-là, l'équation différentielle devient linéaire et nous savons la résoudre de façon analytique. Nous écrirons comme d'habitude $2\beta = b/m$ et $\omega_0^2 = g/L$. Nous ferons apparaître le paramètre sans dimension $\gamma = F_0/mL\omega_0^2 = F_0/mg$ qui caractérise le rapport de l'amplitude de la force d'excitation et du poids.

Après avoir réécrit l'équation différentielle en fonction de β, ω_0^2 et γ, déterminer $\phi(t)$ en régime permanent sous la forme $\phi(t) = A\cos(\omega t - \delta)$, ce qui revient à trouver $A(\omega)$ et $\delta(\omega)$.

c) Pour quelle valeur de ω l'amplitude $A(\omega)$ est-elle maximale ?

d) Après une étude sommaire des fonctions $A^2(\omega)$ et $\delta(\omega)$, tracer l'allure de ces dernières. Nous pourrons tracer l'allure des courbes pour deux facteurs de qualité Q_1 et Q_2 tels que $Q_1 > Q_2$ par exemple (Rappel : $Q = \omega_0/2\beta$).

Exercice 5 : Pourquoi le ciel est-il bleu ? (source www.david-malka-mpsi.fr)

La couleur bleue du ciel résulte de l'interaction des électrons des atomes et molécules atmosphériques avec la lumière émise par le Soleil.

On représente les atomes par le modèle proposé par Thomson au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Il consiste en l'association d'un noyau chargé positivement à l'intérieur duquel se déplace les électrons de charge $-e$ et de masse m (fig.2). Le proton O exerce alors une force de rappel $\vec{F}$ sur chaque l'électron M. Les pertes d'énergie de l'électron, par rayonnement, dues à son mouvement sont modélisées par une force de frottement fluide $\vec{f}$.

La lumière est, elle, une onde électromagnétique essentiellement caractérisée par un champ électrique oscillant qui s'écrit au niveau de l'atome $\overrightarrow{E} = E_0 cos(\omega t)\vec{e_z}$.

On rappelle qu'une charge q plongée dans un champ électrique $\vec{E}$ est soumis à une force $q\vec{E}$ et que l'interaction gravitationnelle est négligeable à l'échelle atomique.

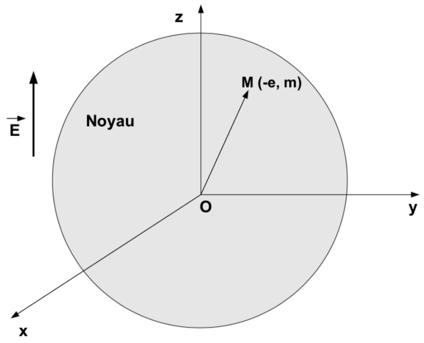


FIGURE 2 – Atome de Thomson

Enfin, pour simplifier, on supposera le noyau atomique fixe dans le référentiel terrestre, lui même supposé galiléen.

Après un régime transitoire d'une courte durée, l'électron oscille suivant la direction du champ électrique de l'onde. La force de rappel s'écrit alors $\overrightarrow{F} = -kz\vec{e_z}$ et la force de frottement fluide s'écrit $\vec{f} = -h\dot{z}\vec{e_z}$.

1. Écrire l'équation du mouvement de l'électron suivant $\vec{e_z}$. On posera $2\alpha = \frac{h}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.
2. En régime établi, proposer une expression pour la position $z(t)$ de l'électron. Exprimer alors l'amplitude complexe $\underline{z}$ associée.
3. En déduire l'amplitude $a(x)$ de l'accélération de l'électron. On posera $a_0 = |eE_0/m|$ et $x = \omega_0/\omega$.
4. Sachant que $\omega_0 \gg \alpha$, tracer l'allure de $a(x)$.
5. La lumière visible correspond au spectre $[\omega_1, \omega_2]$ avec ω_1 et $\omega_2 \ll \omega_0$. Proposer une expression approchée de $a(x)$ à $\sim a_0/x^6$ près.
6. La couleur du ciel ! Une charge en accélération a émet dans toute les directions un rayonnement électromagnétique de puissance $P(\omega) = \mu a^2(\omega)$, μ constante positive.

   6.1 Montrer que, dans le domaine visible, la puissance rayonnée $P(\lambda)$ peut être approchée par l'expression :

$$P(\lambda) \approx \mu a_0^2 \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4}$$

   où est la longueur λ de la lumière incidente et $\lambda_0 = \dfrac{2\pi c}{\omega_0}$, c la célérité de la lumière dans le vide.

   6.2 La puissance lumineuse calculée précédemment est rayonnée dans toutes les directions par les molécules. Faire un schéma et calculer P pour le rouge et pour le bleu. Commenter.

   6.3 Le raisonnement précédent est-il vraiment suffisant pour expliquer la couleur bleue du ciel ?