Mécanique série n°6-bis : Théorème du moment cinétique et rotation

Atome d'hydrogène, modèle de Bohr (extrait Concours ATS, 2010)

Les données suivantes pourront être utiles :

- Masse d'un proton : $m_p = 1,7.10^{-27}$ kg
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg
- Masse molaire de l'hydrogène : $M_{\mathrm{H}} = 1\ \mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19}$ C
- Constante de Planck : $h = 6,6.10^{-34}\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$
- Énergie d'un photon de fréquence ν : $\mathcal{E} = h\nu$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}\ \mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$
- Constante gravitationnelle : $\mathscr{G} = 6,7.10^{-11}\ \mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02.10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$
- Pression standard $p° = 1$ bar $= 10^5$ Pa
- Enthalpie standard de formation à $T = 298$ K : $\Delta_f H°(\mathrm{H_2O}_{(\ell)}) = -285,83\ \mathrm{kJ}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$
- Capacités molaires standards :
  - $C_{p,m}°(\mathrm{H_2O}_{(\ell)}) = 75,291\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$
  - $C_{p,m}°(\mathrm{O_2}) = 29,355\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$
  - $C_{p,m}°(\mathrm{H_2}) = 28,824\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$

I. Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

On considère l'atome d'hydrogène ${}^1_Z\mathrm{H}$.

I.1. Quel est le numéro atomique Z de l'atome d'hydrogène ? Préciser la composition de cet atome.

On étudie dans la suite le mouvement de l'électron autour du noyau de l'atome ${}^1_Z\mathrm{H}$.

La force électrostatique subie par l'électron est dirigée selon la droite proton-électron. Cette force attractive a pour intensité $F_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r^2}$, où e est la charge élémentaire et r la distance proton-électron.

I.2. L'interaction électrostatique est-elle toujours attractive ?

I.3. Exprimer l'intensité de l'interaction gravitationnelle F_g subie par l'électron de la part du noyau. On notera $\mathscr{G}$ la constante gravitationnelle. Cette interaction est-elle toujours attractive ?

I.4. Calculer un ordre de grandeur du rapport F_g/F_e. En déduire que l'on peut négliger l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électrostatique.

I.5. Placer sur un schéma, représentant le système mécanique étudié, la force électrostatique qui s'exerce sur l'électron et la base mobile adaptée à l'étude de son mouvement.

Pour décrire l'atome d'hydrogène, Rutherford a utilisé un modèle planétaire dans le cadre de la mécanique newtonienne : l'électron a un mouvement circulaire, de rayon r, autour du noyau supposé fixe. Par la suite, on considérera le proton comme immobile dans un référentiel galiléen.

I.6. A partir de la relation fondamentale de la dynamique, montrer que le mouvement de l'électron est uniforme.

I.7. En déduire l'expression de la vitesse de l'électron v en fonction de ε_0, e, r et m_e.

I.8. Exprimer l'énergie cinétique de l'électron $\mathcal{E}_c$ en fonction de ε_0, e et r.

I.9. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ associée à l'interaction électrostatique (On conviendra de choisir $\mathcal{E}_p$ telle que $\mathcal{E}_p(r \to \infty) = 0$).

I.10. Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de l'électron s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Commenter le signe.

Lors de l'étude de l'atome d'hydrogène, différents faits expérimentaux ont conduit Niels Bohr à formuler l'hypothèse suivante : l'électron ne peut se déplacer que sur certains cercles dont les rayons r_n obéissent à la loi (quantification du moment cinétique) :

$$L = n\hbar$$

où :

- L : moment cinétique de l'électron
- $\hbar$: constante de Planck réduite, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1,055.10^{-34}$ J $\cdot$ s
- n : nombre entier ≥ 1

I.11. Exprimer la norme du moment cinétique L en fonction de m_e, r_n et de sa vitesse v_n sur le cercle de rayon r_n.

I.12. En déduire l'expression de r_n en fonction des constantes ε_0, e, $\hbar$, m_e et de n puis en fonction de r_1 et n.

I.13. Déterminer l'expression de $\mathcal{E}_n$, énergie mécanique de l'électron sur le cercle de rayon r_n, en fonction de ε_0, e, $\hbar$, m_e et de n. En déduire que $\mathcal{E}_n$ est de la forme :

$$\mathcal{E}_n = \frac{\mathcal{E}_1}{n^2}$$

On exprimera $\mathcal{E}_1$ en fonction de ε_0, e et r_1.

I.14. Calculer r_1, puis calculer $\mathcal{E}_1$ en joule et en électronvolt ($1\,eV = 1,6.10^{-19}$ J).

II. Spectre de l'atome d'hydrogène

II.1. Quelle est l'expression de la fréquence ν puis de la longueur d'onde λ d'un photon émis lorsque l'électron passe d'un niveau d'énergie $\mathcal{E}_p$ à un niveau d'énergie $\mathcal{E}_n$ ($p > n$) ?

En 1885, Joseph Balmer observe le spectre visible de l'atome d'hydrogène. Il constate que $1/\lambda$ est proportionnel à $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{p^2}$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_h \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p^2} \right)$$

II.2. Déterminer l'expression de R_h en fonction de $\mathcal{E}_1$, h et c.

II.3. À quelle valeur de n la série de raies de l'atome d'hydrogène observée par Joseph Balmer correspond-elle ?

II.4. Déterminer les longueurs d'onde des raies de cette série pour p allant jusqu'à 5. On prendra pour les applications numériques $R_h = 1,097.10^7$ m^{-1}.

II.5. Quel intervalle de longueurs d'onde définit habituellement le spectre visible ?

Niels Bohr (1885-1962), physicien Danois, prix Nobel de physique en 1922. Il fut l'un des principaux artisans de l'édification de la physique quantique.

Albert Einstein et Niels Bohr en 1930 à l'occasion d'un Congrès Solvay. (Photo de Paul Ehrenfest)