

FILTRAGE ANALOGIQUE DU SIGNAL AVEC DES CIRCUITS LINEAIRES

« For a successful technology, reality must take precedence over public relations, for Nature cannot be fool »
Richard Feynman (1928-1988)

Dans ce chapitre, nous allons étudier les circuits électriques sous l'angle du **filtre**. De façon plus précise, nous allons étudier la réponse (signal de sortie) d'un circuit soumis à une excitation sinusoïdale (signal d'entrée) suivant la fréquence de cette excitation. Nous introduirons ainsi des outils commodes que sont la **fonction de transfert** et les **diagrammes de Bode**. Les notions introduites dans ce chapitre sont très générales et s'appliquent dans d'autres domaines (mécanique, optique...).

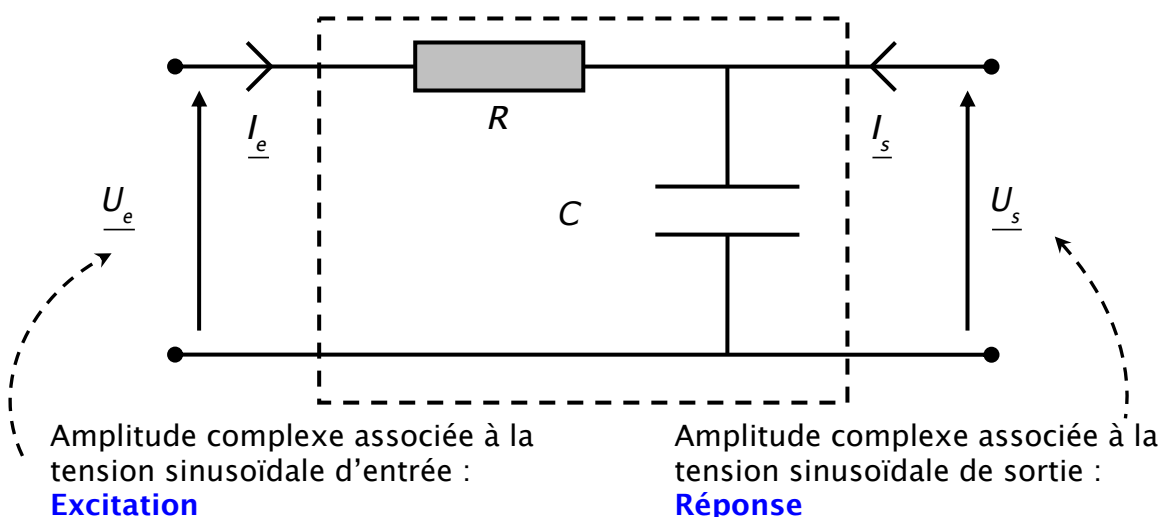
L'électronique est la science du traitement des signaux électriques, dont un des problèmes fondamentaux est d'extraire l'information utile d'un signal issu d'un capteur ou reçu d'un interlocuteur. Sur l'antenne de réception d'un téléphone portable par exemple, de multiples signaux se superposent. Certains sont des bruits générés par l'environnement, d'autres concernent des communications dont une seule est destinée à être reçue par l'utilisateur du téléphone. Une des tâches importantes en électronique des télécommunications consiste donc à séparer la partie utile, celle qui transporte l'information de partie parasite. De même qu'un filtre coloré permet de sélectionner des composantes de lumière sur la base d'un critère de teinte, **un filtre électronique amplifie ou atténue les composantes d'un signal selon leur fréquence**.

Un filtre est un système qui permet de sélectionner des signaux utiles, sur un critère fréquentiel.

On trouve des filtres dans un peu près tous les appareils électroniques qui nous entourent : les téléphones, les radios, les télévisions, les ordinateurs etc...

I – CONCEPTS DE BASE : EXEMPLE DU FILTRE PASSE-BAS RC

1.1 Fonction de transfert



On cherche à déterminer la réponse du circuit ci-dessus, $u_s(t) = U_{ms} \cos(\omega t + \varphi_s)$, lorsqu'il est soumis à une excitation sinusoïdale d'entrée $u_e(t) = U_{me} \cos(\omega t + \varphi_e)$. Nous allons travailler avec les amplitudes complexes associées à ces tensions ($\underline{U}_s$ et $\underline{U}_e$).

On remarque que rien n'est « branché » sur la sortie du circuit, on travaille en sortie ouverte. Ainsi $i_s(t) = 0$.

Pour déterminer $\underline{U}_s$ en fonction de $\underline{U}_e$, on peut employer un pont diviseur de tension, outil que nous allons souvent utiliser dans ce chapitre. On a $\underline{U}_s = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \underline{U}_e$.

Nous voyons que le rapport $\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ est une fonction caractéristique du circuit étudié qui relie le signal d'entrée au signal de sortie, c'est la **fonction de transfert**. De façon générale, on définit:



Fonction de transfert, définition: $\underline{H}(\omega) \equiv \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$

$\underline{H}(\omega)$ est une fonction complexe qui dépend de la pulsation ω du signal d'entrée. Elle possède donc un module $|\underline{H}(\omega)|$ et une phase $\varphi(\omega)$, $\underline{H}(\omega) = |\underline{H}(\omega)| e^{j\varphi}$. Ce chapitre consiste essentiellement à étudier ces deux fonctions pour divers réseaux.

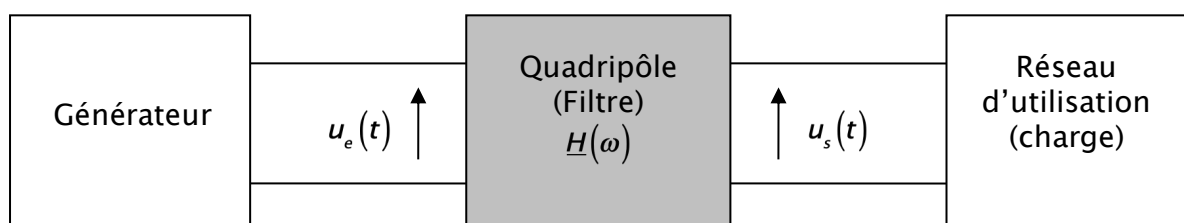
Ici, on obtient facilement :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \text{ et } \varphi(\omega) = -\arctan(RC\omega).$$

Suivant la valeur de ω , $|\underline{H}(\omega)|$ et $\varphi(\omega)$ prennent des valeurs différentes. Ainsi, comme nous le verrons, le signal d'entrée sera transmis de façon différente par le circuit suivant sa pulsation. On appelle donc ces circuits des **filtres**.

1.2 Commentaires et remarques générales sur les filtres

- Les circuits que nous étudions dans ce chapitre, comme le filtre RC précédent, possèdent deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie, il s'agit de **quadripôles**.
- Un **filtre** est un quadripôle conçu pour **transmettre sélectivement** les diverses fréquences (ou pulsation) du signal d'entrée harmonique (sinusoïdal).



- La fonction de transfert d'un quadripôle linéaire (constitué uniquement de dipôles linéaires) s'écrit de façon générale comme le rapport de deux polynômes en $(j\omega)$:

$$\underline{H}(\omega) = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_n(j\omega)^n}{a'_0 + a'_1(j\omega) + a'_2(j\omega)^2 + \dots + a'_n(j\omega)^n},$$

avec a_n et a'_n des coefficients réels. **L'ordre d'un filtre** correspond au degré le plus élevé du polynôme (soit au numérateur soit au dénominateur).

Il faut noter que la fonction de transfert d'un filtre n'est rien d'autre, en représentation complexe, que l'équation différentielle qui relie $u_s(t)$ et $u_e(t)$. En effet si on repasse en représentation

temporelle, en se souvenant de la substitution $j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}$, on obtient :

$$a'_0 u_s(t) + a'_1 \frac{du_s(t)}{dt} + a'_2 \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + \dots + a'_n \frac{d^n u_s(t)}{dt^n} = a_0 u_e(t) + a_1 \frac{du_e(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 u_e(t)}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n u_e(t)}{dt^n}.$$

Il est plus simple de travailler en représentation complexe car on manipule des équations algébriques plutôt que des équations différentielles.

Dans ce cours, nous n'étudierons pas les problèmes d'existence et de stabilité de la fonction de transfert d'un point de vue mathématique. Cela sera étudié en partie dans le cours de sciences de l'ingénieur.

- Un **filtre passif** ne contient que des dipôles passifs R , L et C . Un **filtre actif** contient des éléments actifs alimentés par des sources extérieures d'énergie ; pour nous il s'agira uniquement des amplificateurs opérationnels.

1.3 Gain et Gain en décibel

a) Gain

Par définition, le gain est le module de la fonction de transfert :



Gain, définition: $G(\omega) \equiv |\underline{H}(\omega)|$

Il est souvent plus commode de travailler en pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ où ω_0 est la pulsation

caractéristique du filtre. Dans notre exemple, on a $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, $\underline{H}(x) = \frac{1}{1+jx}$ et $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

b) Gain en décibel

Par définition, le gain en décibel est donné par :



Gain en décibel: $G_{dB}(x) \equiv 20 \log |\underline{H}(x)| = 20 \log G(x)$

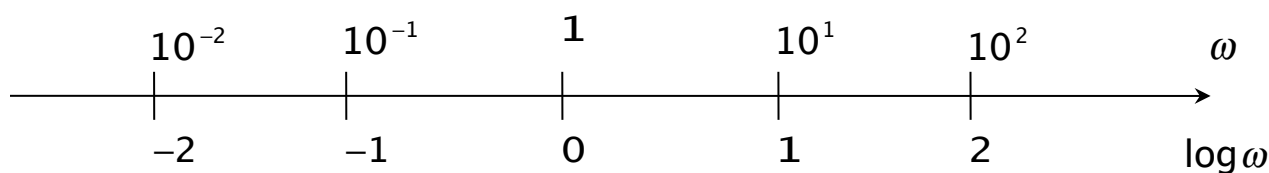
L'unité du gain en décibel est le décibel noté dB. Il s'agit en réalité d'une fausse unité car $|H(\omega)|$ n'a pas d'unité, on ne peut pas prendre le log d'une grandeur avec une unité. Pourquoi travailler avec $G_{dB}(x)$ plutôt qu'avec $G(x)$?

→ La fonction log atténue les variations d'une grandeur, on peut donc étudier à la fois, sur le même graphe, les faibles et les fortes valeurs de $G(x)$.

→ Les yeux (capteurs naturels de l'intensité lumineuse) et les oreilles (capteurs naturels de l'intensité acoustique) sont plus sensibles à une échelle logarithmique qu'à une échelle linéaire.

c) Rappels de mathématiques utiles dans ce chapitre :

- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$; $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a$; $\log(a^n) = n \log a$.
- $\log(2) \approx 0,3$; $\log(3) \approx 0,5$.
- Si on divise $G(\omega)$ par $\sqrt{2}$, en décibel on obtient $20\log\frac{G(\omega)}{\sqrt{2}} = 20\log G(\omega) - 10\log 2$ soit $20\log G(\omega) - 3 \text{ dB}$, cela revient à retrancher 3 au gain en décibel.
- Si on divise $G(\omega)$ par 10, en décibel on obtient $20\log\frac{G(\omega)}{10} = 20\log G(\omega) - 20\log 10$ soit $20\log G(\omega) - 20 \text{ dB}$, cela revient à retrancher 20 au gain en décibel.
- Un changement d'un ordre de grandeur en ω correspond seulement à un changement de une unité en $\log \omega$. Ainsi, en échelle log, on peut représenter des variations de ω bien plus importantes qu'en échelle linéaire.



1.4 Diagrammes de Bode

Nom donné en l'honneur de Hendrik W. Bode (1905–1982), un ingénieur des célèbres laboratoires de la compagnie américaine Bell Telephone, pour son travail de pionnier dans ce domaine dans les années 1930–40.

a) Diagramme de Bode du gain en décibel

Il s'agit du **graphe** $G_{dB}(\omega) = f(\log \omega)$ ou $G_{dB}(x) = f(\log x)$.

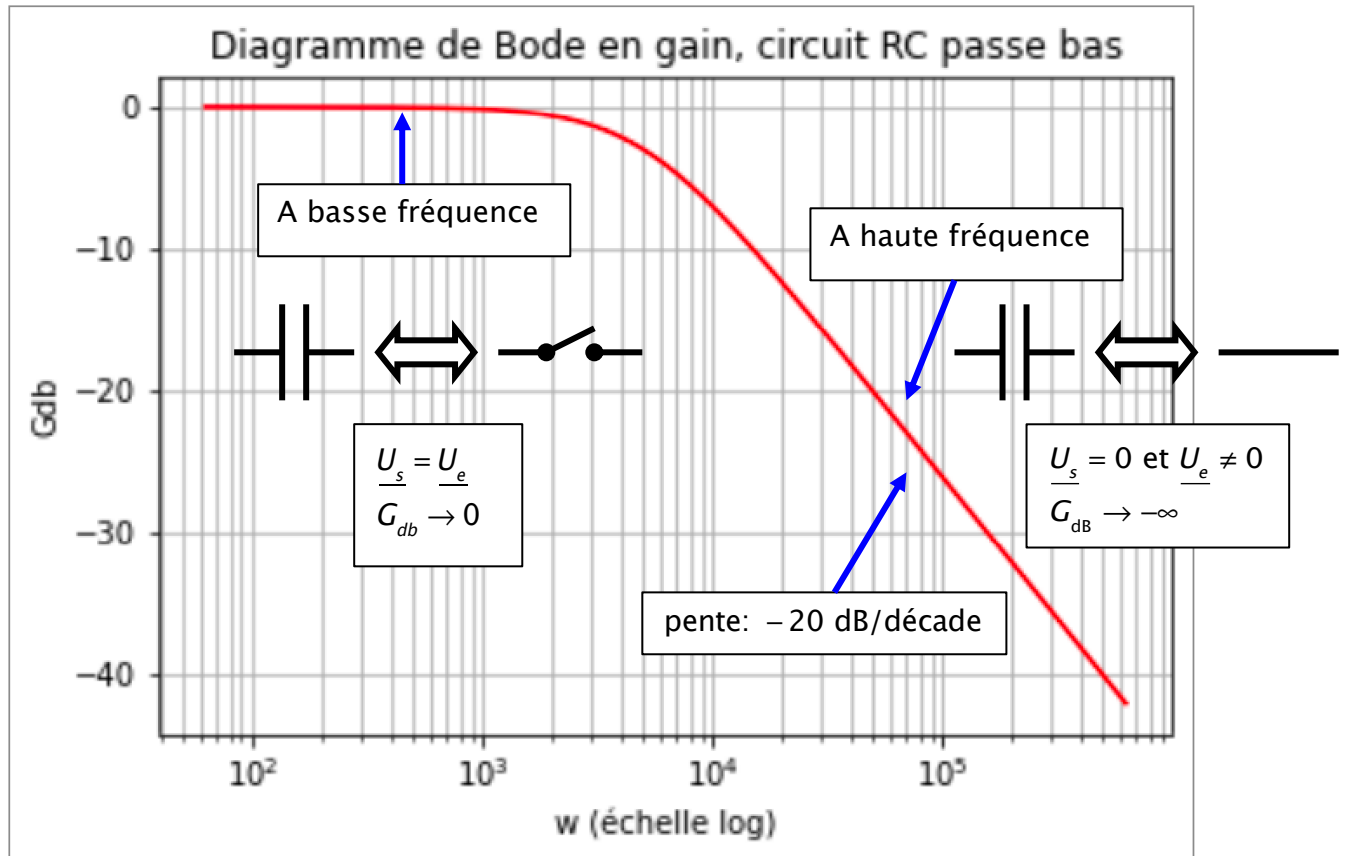
Nous allons reprendre l'étude de notre exemple du filtre RC. On a $20\log G(x) = -10\log(1+x^2)$, étudions brièvement cette fonction :

- $x \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow 0 \quad \log x \rightarrow -\infty \quad G_{dB} \rightarrow 0$
- $x \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty \quad \log x \rightarrow \infty \quad G_{dB} \rightarrow -10 \log x^2 = -20 \log x$

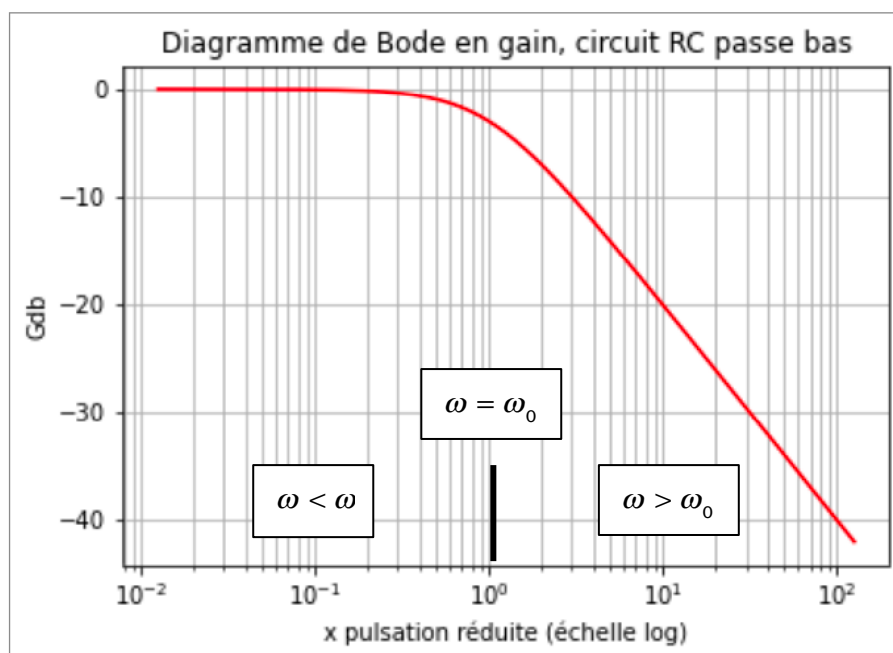
A haute fréquence, la courbe de réponse en gain admet une **asymptote** passant par l'origine et de pente -20 dB/décade .

- $x = 1 \quad \omega = \omega_0 \quad G_{dB} = -10 \log 2 = -3 \text{ dB}$

On obtient les courbes suivantes (réalisées avec Python) avec $R = 1000 \, \Omega$ et $C = 0,2 \times 10^{-6} \text{ F}$



Ci-dessous, la même courbe mais l'abscisse est la pulsation réduite $x \equiv \omega/\omega_0$.



On constate que pour $\omega \ll \omega_0$ c'est-à-dire $x \ll 1$, le filtre transmet les signaux presque sans atténuation, cette dernière reste inférieure à 3 dB. Par contre pour $\omega \gg \omega_0$ c'est-à-dire $x \gg 1$, les signaux sont très atténués à la sortie du filtre ; l'atténuation est de -20 dB par décade. Il s'agit donc d'un filtre passe-bas, il ne laisse passer que les signaux de basses fréquences. De plus, il n'est constitué que de dipôles passifs (R et C) et sa fonction de transfert est seulement du 1^{er} ordre, il s'agit donc d'un **filtre passe-bas du 1^{er} ordre passif**.

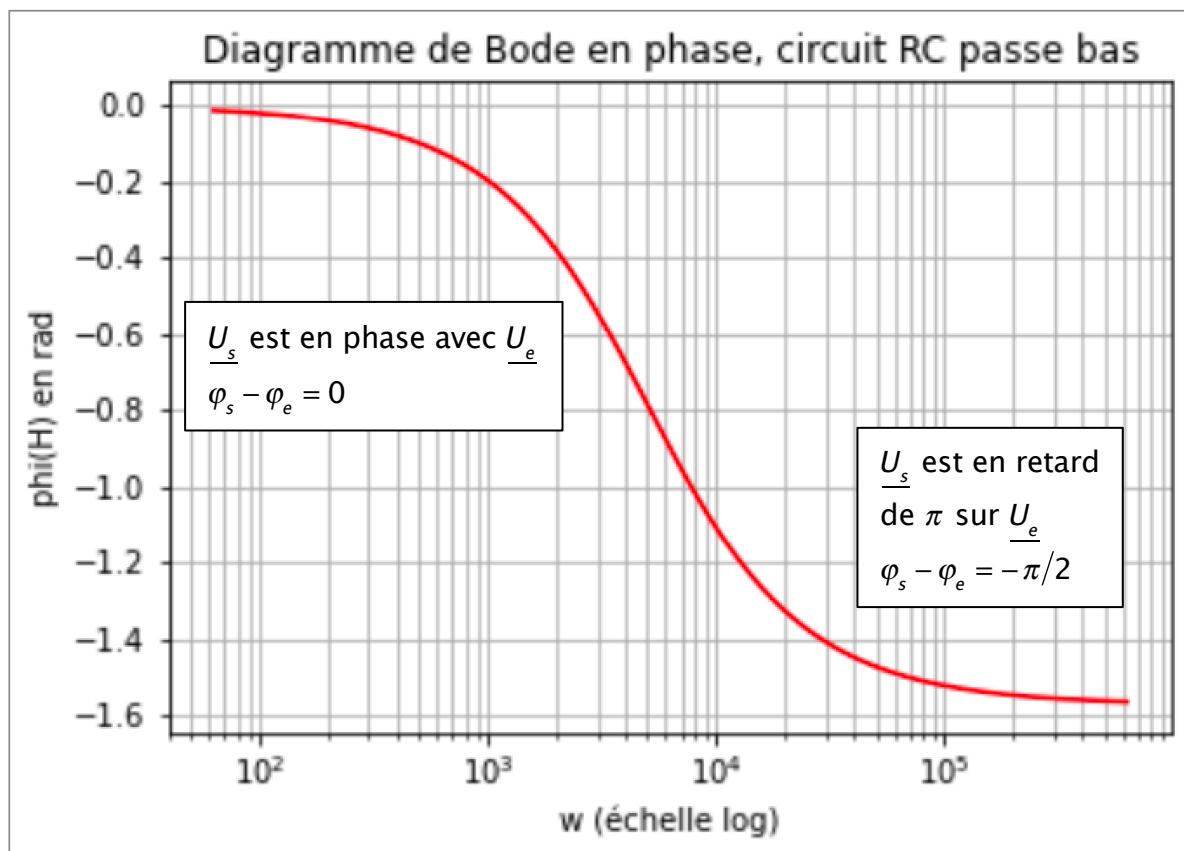
b) Diagramme de Bode de la phase.

Il s'agit du **graphe** $\varphi(\omega) = f(\log \omega)$ ou $\varphi(x) = f(\log x)$ (par définition $\varphi \equiv \varphi_s - \varphi_e$).

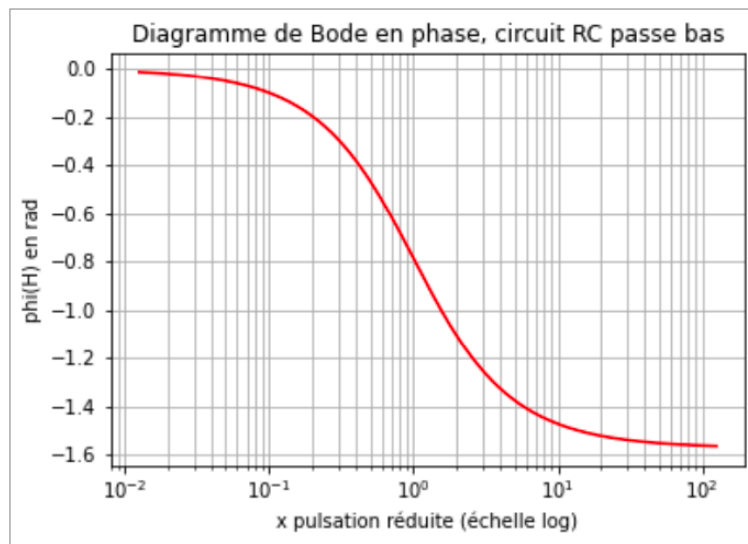
Dans le cas du filtre RC , on a $\varphi(x) = -\arctan(x)$, étudions brièvement cette fonction :

- Comme $x > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi(x) < 0$
- $x \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow 0 \quad \log x \rightarrow -\infty \quad \varphi \rightarrow 0$
- $x \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty \quad \log x \rightarrow \infty \quad \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$
- $x = 1 \quad \omega = \omega_0 \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$

On obtient la courbe suivante (réalisée avec Maple)



Ci-dessous, la même courbe mais l'abscisse est la pulsation réduite $x \equiv \omega/\omega_0$.



A basse fréquence $x \ll 1$, le signal de sortie n'est pas déphasé par rapport à celui d'entrée, par contre il se déphase de $-\pi/2$ à haute fréquence $x \gg 1$. Nous verrons que dans ce dernier cas, le circuit a un caractère intégrateur.

1.5 Pulsation de coupure, bande passante à -3 dB

On a déjà parlé de la notion de bande passante dans l'étude du circuit *RLC* série en régime sinusoïdal forcé dans le cadre du phénomène de résonance.

- Par définition, la pulsation de coupure ω_c est telle que $G(\omega = \omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$, soit en décibel :

$$G_{\text{dB}}(\omega = \omega_c) = G_{\text{dB}}^{\max} - 3 \text{ dB}.$$

- La bande passante d'un filtre est l'ensemble des pulsations telles que :

$$\frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \leq G(\omega) \leq G_{\max} \text{ où } G_{\text{dB}}^{\max} - 3 \text{ dB} \leq G_{\text{dB}}(\omega) \leq G_{\text{dB}}^{\max}$$

Dans le cadre du filtre *RC*, comme $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $G_{\max} = 1$ quand $x = 0$.

$$\frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x_c^2}} \text{ conduit à } x_c = 1, \text{ soit } \omega_c = \omega_0.$$

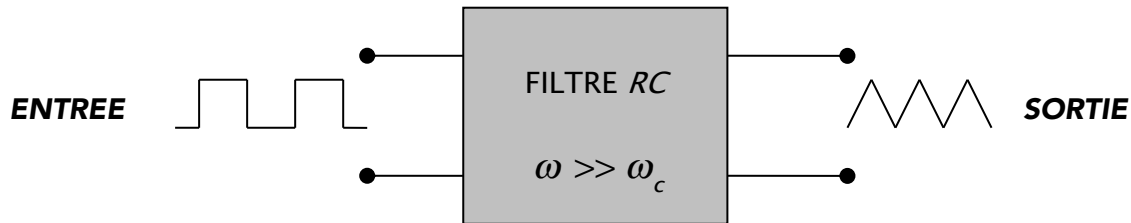
1.6 Caractère intégrateur du filtre

A haute pulsation, $\omega \gg \omega_c = \omega_0$, la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ du filtre *RC* devient

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} \approx \frac{1}{jRC\omega} = \frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega}. \text{ Si on repasse dans la représentation temporelle, on obtient :}$$

$$u_s(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t u_e(t) dt.$$

On constate que le filtre réalise l'intégration du signal d'entrée, on a donc un **intégrateur**. Si on envoie à l'entrée du filtre un signal créneau de haute fréquence, on obtient à la sortie un signal triangle (cf TP). Attention, il ne faut pas oublier que la notion de fonction de transfert et l'utilisation de la représentation complexe ne sont valables que pour les signaux sinusoïdaux.



II - FILTRE INTEGRATEUR

2.1 Equation différentielle et fonction de transfert

On cherche à réaliser un quadripôle qui réalise, entre la tension d'entrée et la tension de sortie,

l'opération mathématique suivante : $u_s(t) = u_s(0) + \frac{1}{\tau} \int_0^t u_e(t) dt$, c'est-à-dire :

$$\frac{du_s(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} u_e(t)$$

En représentation complexe, cette équation différentielle donne la fonction de transfert du quadripôle souhaité (équation algébrique) :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{j\omega\tau}$$

avec τ homogène à un temps. Il s'agit de la fonction de transfert d'un **filtre intégrateur**. Nous allons étudier l'allure de ces diagrammes de Bode.

2.2 Diagrammes de Bode

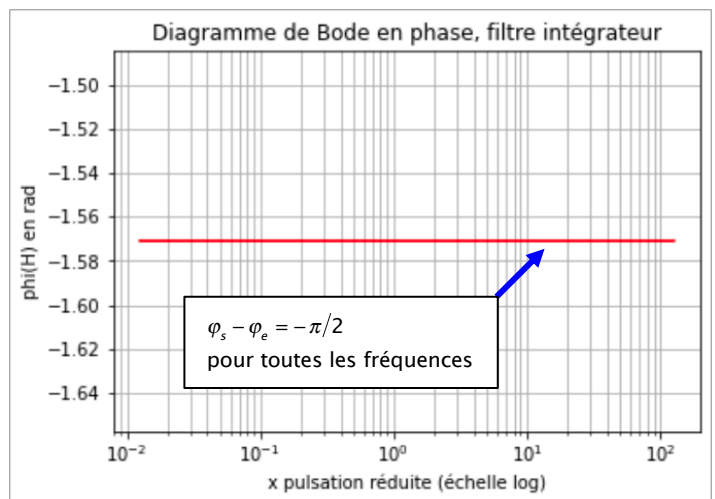
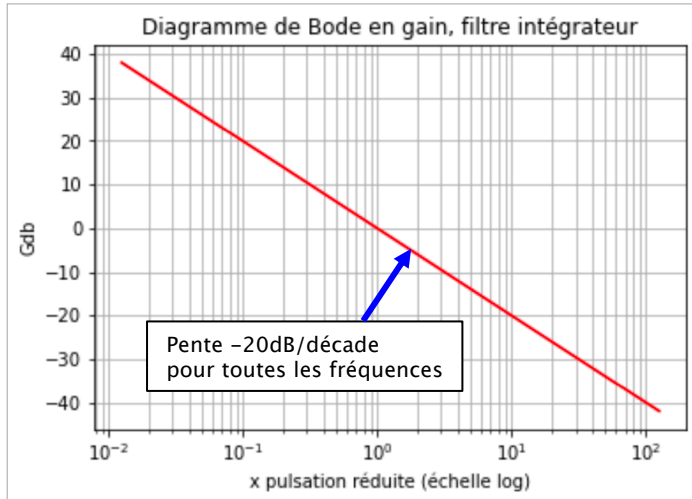
a) Diagramme de Bode du gain en décibel

On peut faire apparaître la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ avec $\tau = \frac{1}{\omega_0}$; dans ce cas $\underline{H}(x) = \frac{1}{jx}$ et

$G(x) = \frac{1}{x}$ soit $G_{dB}(x) = -20 \log x$. Il s'agit d'une droite qui passe par l'origine et de pente -20 dB/décade .

b) Diagramme de Bode de la phase

On a facilement $\varphi(x) = \arg 1 - \arg(jx)$, soit $\varphi(x) = -\frac{\pi}{2} = \text{constante}$.



On constate qu'une phase de $-\frac{\pi}{2}$ et un gain de -20 dB/décade sont caractéristiques d'un **filtre intégrateur**. De même, on montre qu'une phase de $\frac{\pi}{2}$ et un gain de 20 dB/décade sont caractéristiques d'un **filtre dérivateur**.

Le filtre passe-bas RC déjà étudié répond à ces conditions, tant que la pulsation du signal d'entrée reste très supérieure à la pulsation de coupure ω_c .

Un filtre passe-bas du premier ordre se comporte comme un intégrateur dans le domaine de pulsation $\omega \gg \omega_c$ correspondant à sa bande atténuée.

Exercice d'application 1: Filtre passe-haut RL

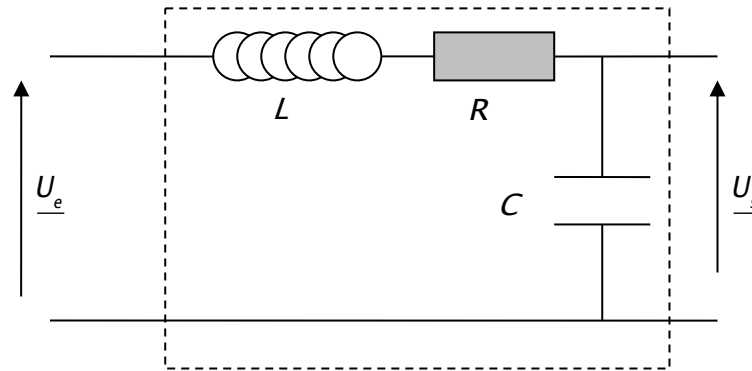
On considère à présent le filtre précédent pour lequel le condensateur est remplacé par une bobine d'inductance L .

- Sans calculs, déterminer le comportement du filtre à basses et hautes fréquences. Conclusion sur sa nature.
- Déterminer la fonction de transfert de ce filtre. On fera apparaître une pulsation caractéristique. Tracer l'allure des diagrammes de Bode. On peut s'aider des résultats résumés dans la partie IV.
- Montrer qu'à basses fréquences, ce filtre se comporte comme un dérivateur.

III - FILTRE PASSIF DU 2^{EME} ORDRE : EXEMPLE DU FILTRE RLC SERIE, FILTRE PASSE-BAS, RESONANCE EN TENSION

Nous allons reprendre l'étude du circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé mais sous l'angle du filtre avec l'étude de sa fonction de transfert.

3.1 Montage et comportement limite du filtre



Avant de calculer la fonction de transfert de ce filtre et de l'étudier en détail, nous allons regarder le comportement limite de ce filtre. Cela va déjà nous permettre de déterminer la nature de ce filtre.

- $\omega \rightarrow 0 \quad |Z_C| = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty \text{ et } |Z_L| = \omega L \rightarrow 0.$

le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil sans résistance ainsi $\underline{U_s} = \underline{U_e}$.

- $\omega \rightarrow \infty \quad |Z_C| = \frac{1}{\omega C} \rightarrow 0 \text{ et } |Z_L| = \omega L \rightarrow \infty$

Le condensateur se comporte comme un fil sans résistance et la bobine comme un interrupteur ouvert ainsi $\underline{U_s} = 0$.

On en déduit que ce filtre ne laisse passer que les basses fréquences, il s'agit donc **d'un filtre passe-bas**.

3.2 Fonction de transfert

On utilise encore un pont diviseur de tension pour calculer la fonction de transfert.

$$\underline{U_s} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R} + \underline{Z_L}} \underline{U_e} = \frac{1/jC\omega}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \underline{U_e} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \underline{U_e}.$$

On obtient alors $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$

On peut faire apparaître la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$. On obtient alors la fonction de transfert sous sa forme canonique :

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}.$$

On constate que le dénominateur est un polynôme du second ordre en $j\omega$ car $(j\omega)^2 = -\omega^2$. On a donc un **filtre passe-bas du second ordre**.

3.3 Diagrammes de Bode

a) Diagramme de Bode du gain en décibel

On a $G = |\underline{H}(x)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$. On constate que G passe par un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (voir

cours sur le circuit RLC en régime sinusoïdal forcé). On retrouve la résonance en tension aux bornes du condensateur. On a déjà vu que la pulsation réduite de résonance vaut $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

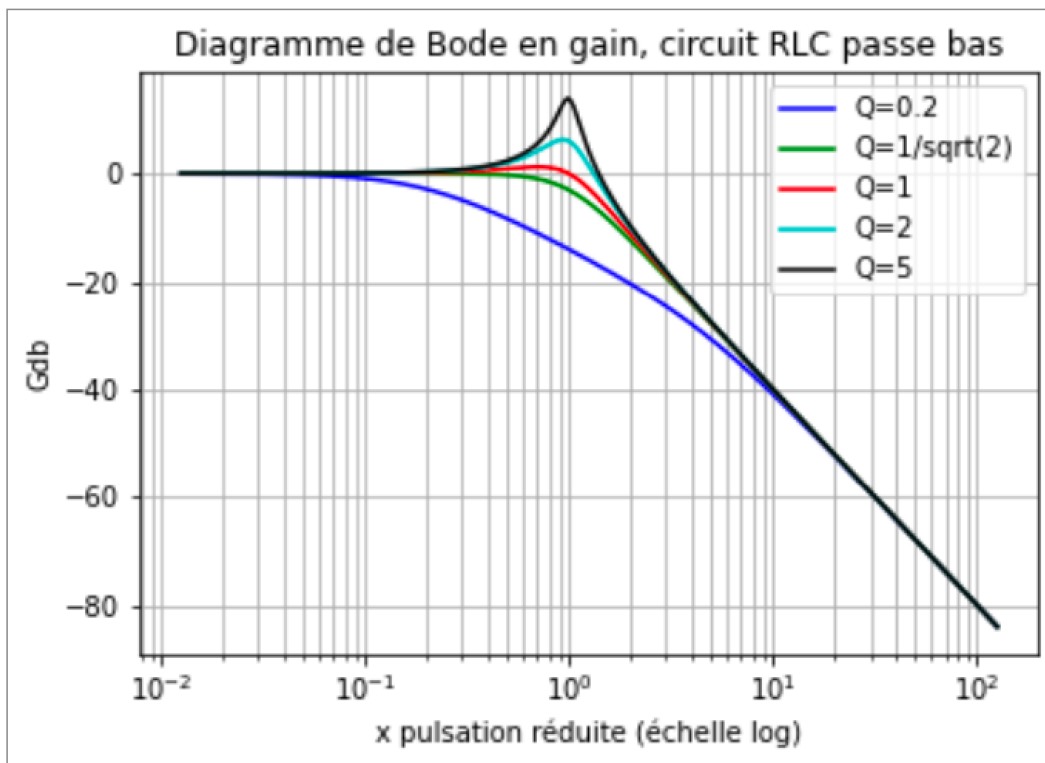
Le gain en décibel vaut $G_{dB} = 20 \log G = -10 \log \left((1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \right)$.

Etudions le comportement asymptotique du gain en décibel :

- $x \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow 0 \quad \log x \rightarrow -\infty \quad G_{dB} \rightarrow 0$
- $x \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty \quad \log x \rightarrow \infty \quad G_{dB} \rightarrow -10 \log \left(x^4 + \frac{x^2}{Q^2} \right) = -40 \log x$

A haute fréquence, la courbe de réponse en gain admet une **asymptote** passant par l'origine et de pente -40 dB/décade.

La pente de l'asymptote est deux fois plus importante que pour un filtre d'ordre 1, les hautes fréquences sont beaucoup plus atténuées, **le filtre est plus sélectif**, c'est l'intérêt d'un filtre du deuxième ordre. On obtient les courbes suivantes réalisé avec Python.



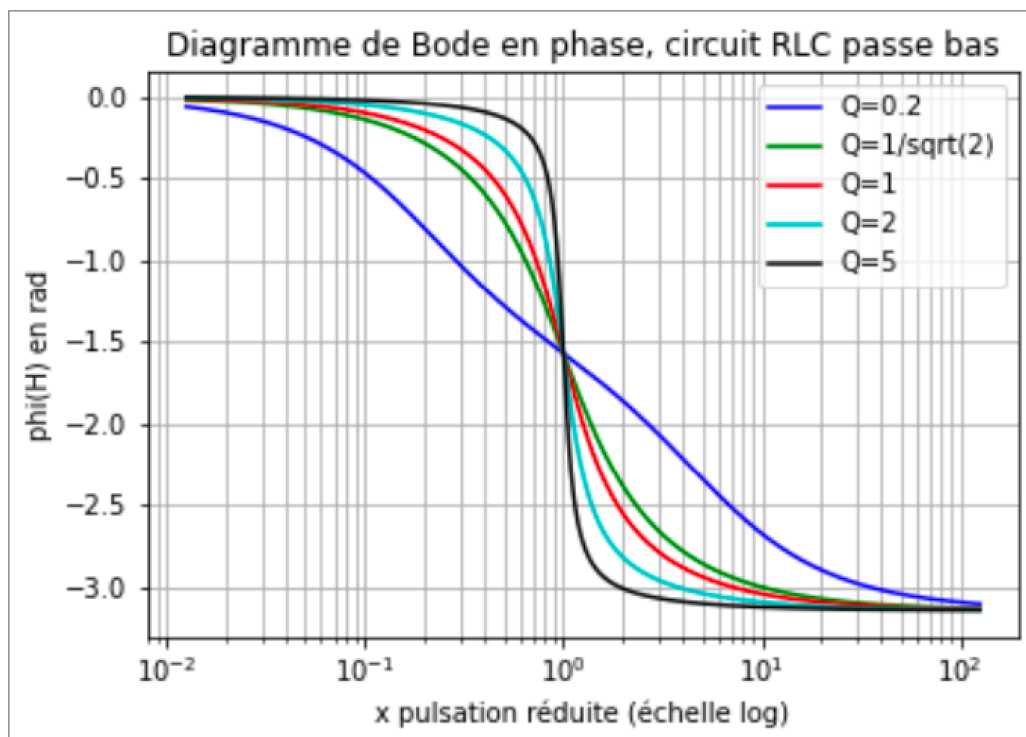
b) Diagramme de Bode de la phase

on a $\tan \varphi(x) = -\frac{x}{Q(1-x^2)}$.

- $x \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow 0 \quad \log x \rightarrow -\infty \quad \varphi \rightarrow 0$
- $x \rightarrow \infty \quad \omega \rightarrow \infty \quad \log x \rightarrow \infty \quad \varphi \rightarrow -\pi$

ATTENTION : Ce cas est un peu délicat. En effet la fonction $\tan$ est définie à π près. On a déjà traité cette situation dans le cours sur le circuit *RLC* en régime sinusoïdal forcé.

- $x = 1 \quad \omega = \omega_0 \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$. On obtient les courbes suivantes :



Exercice d'application 2: Filtre passe-bande

On considère à présent le filtre RLC précédent pour lequel on regarde en sortie la tension aux bornes de la résistance.

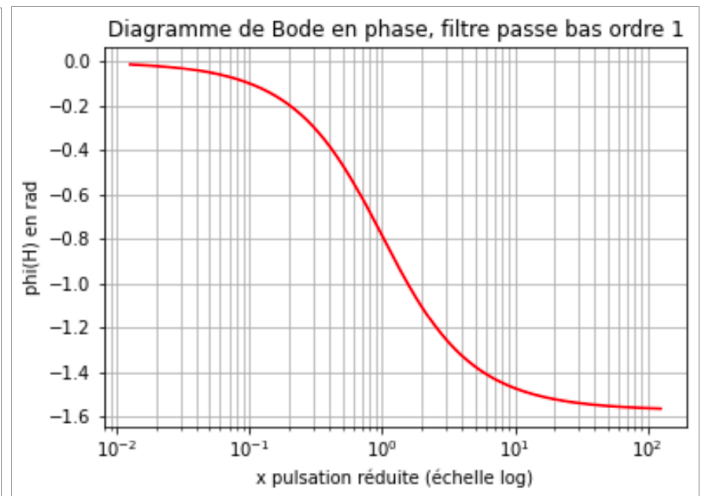
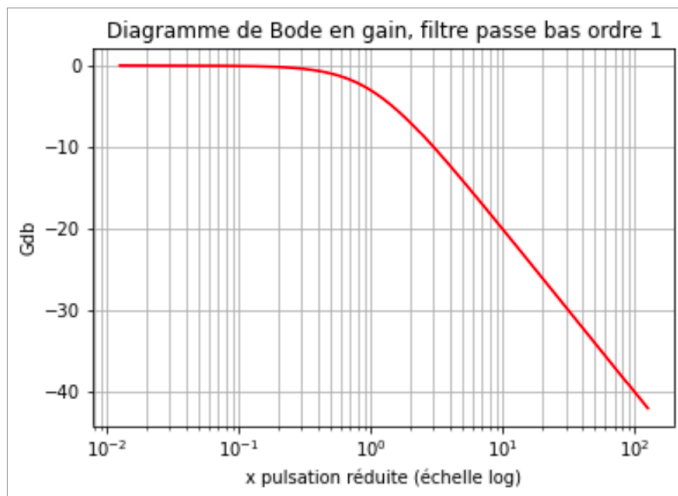
- a) Sans calculs, déterminer le comportement du filtre à basses et hautes fréquences. Conclusion sur sa nature.
- b) Déterminer la fonction de transfert de ce filtre. On fera apparaître une pulsation caractéristique. Tracer l'allure des diagrammes de Bode. On peut s'aider des résultats résumés dans la partie IV.
- c) Déterminer la bande passante à -3dB de ce filtre.

IV – EXEMPLES DE FONCTIONS DE TRANSFERT USUELLES

Nous n'avons étudié que quelques filtres. Les résultats obtenus ne doivent pas être retenus par cœur, il faut avoir compris la démarche pour être capable d'analyser d'autres filtres. Dans cette partie, les diagrammes de Bode pour les fonctions de transfert les plus fréquemment rencontrées sont donnés. Les fonctions de transfert sont écrites sous forme canonique.

4-1 Filtre passe bas du 1^{er} ordre

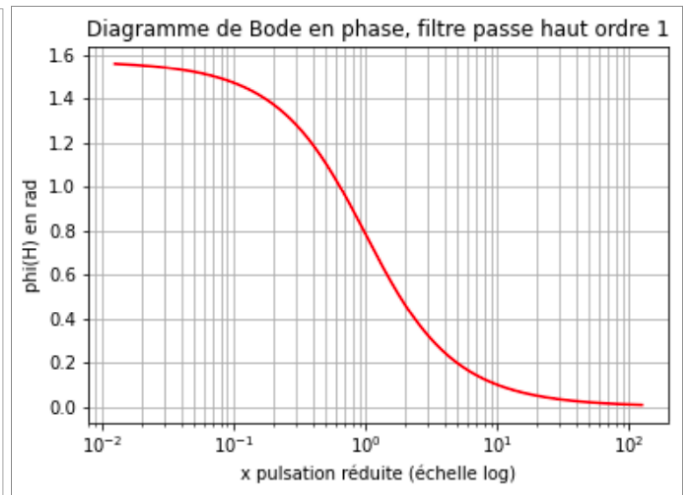
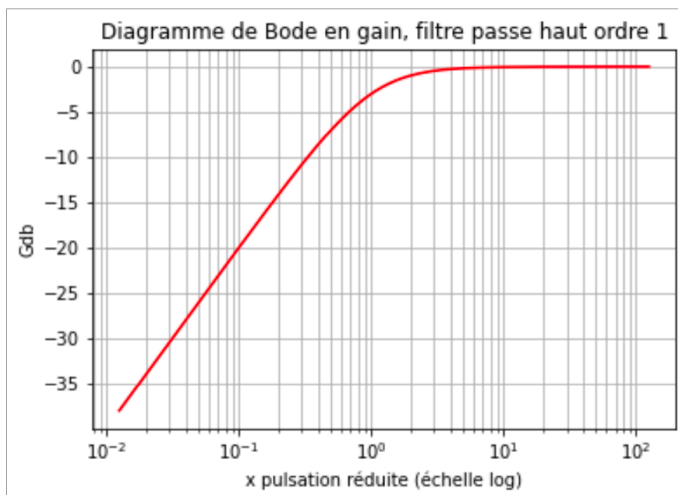
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{A_0}{1 + jx}, A_0 \text{ réel}$$



Remarque : Pour réaliser les courbes, on a pris pour chaque filtre $A_0 = 1$.

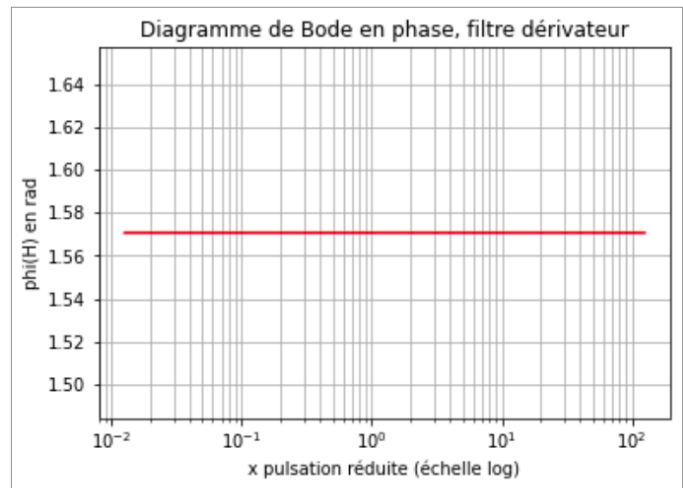
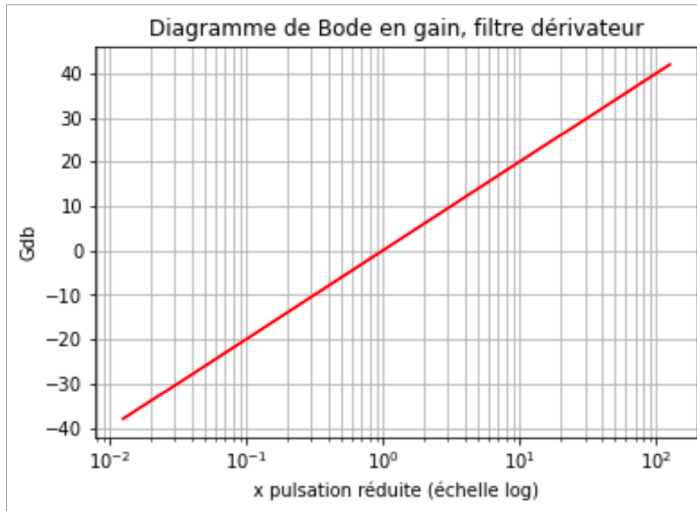
4-2 Filtre passe haut du 1^{er} ordre

$$\underline{H}(j\omega) = A_0 \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = A_0 \frac{jx}{1 + jx} = A_0 \frac{1}{1 - \frac{j}{x}}, A_0 \text{ réel}$$



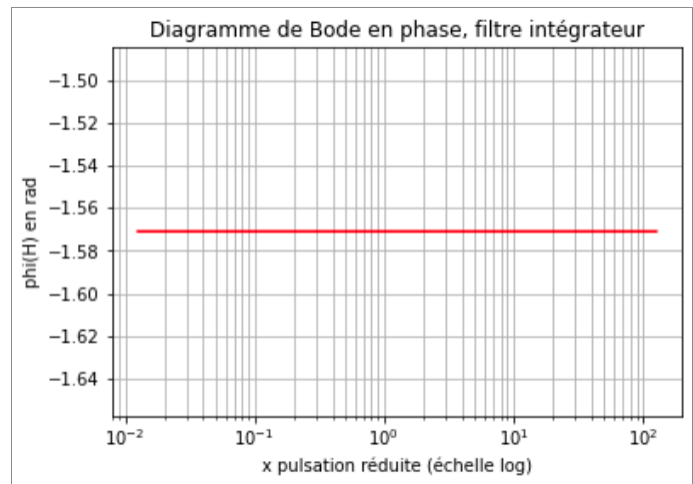
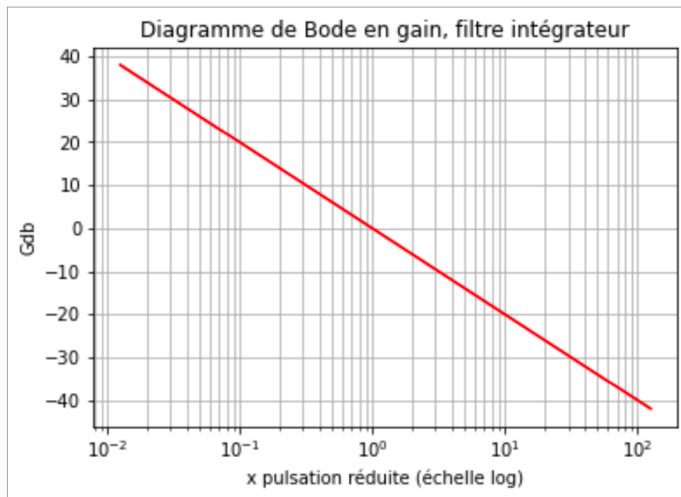
4-3 Filtre dérivateur

$$H(j\omega) = j(\omega/\omega_0) = jX$$



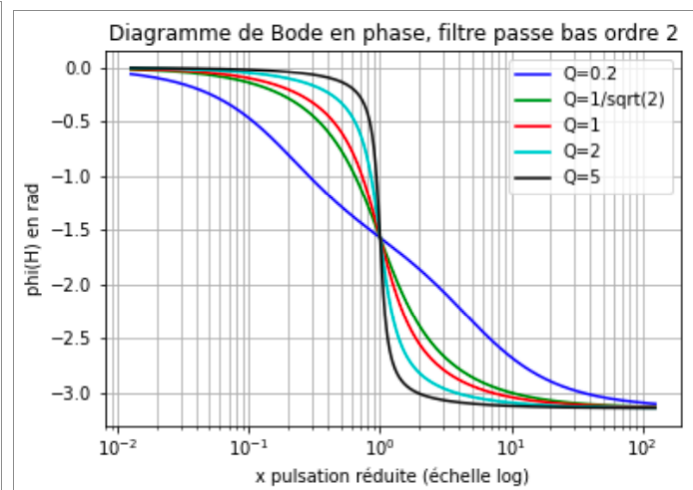
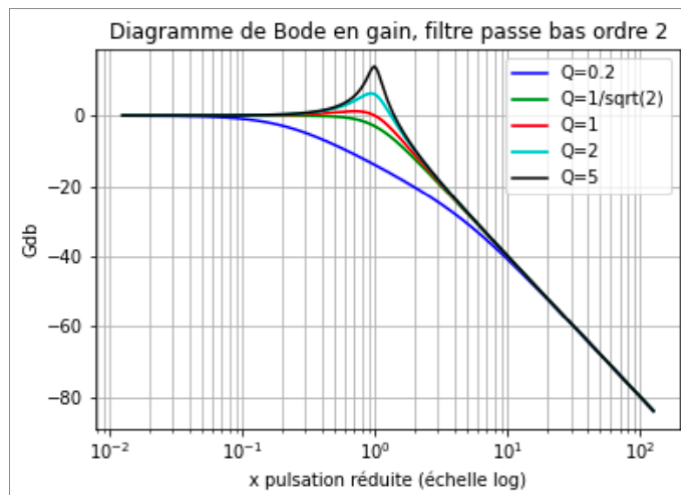
4-4 Filtre intégrateur

$$H(j\omega) = 1/j(\omega/\omega_0) = 1/jX$$



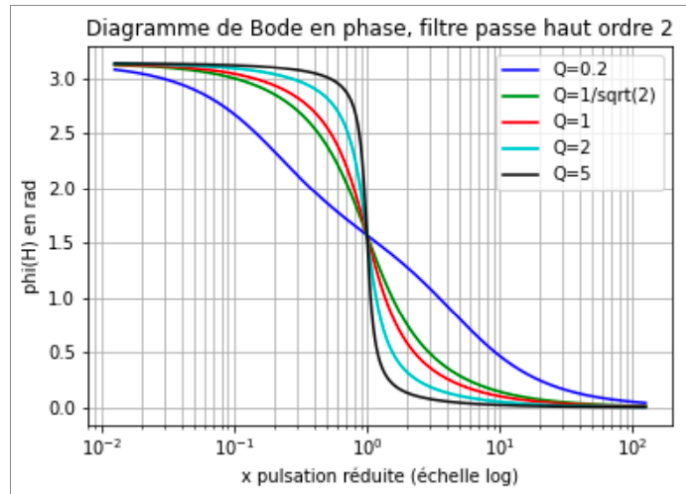
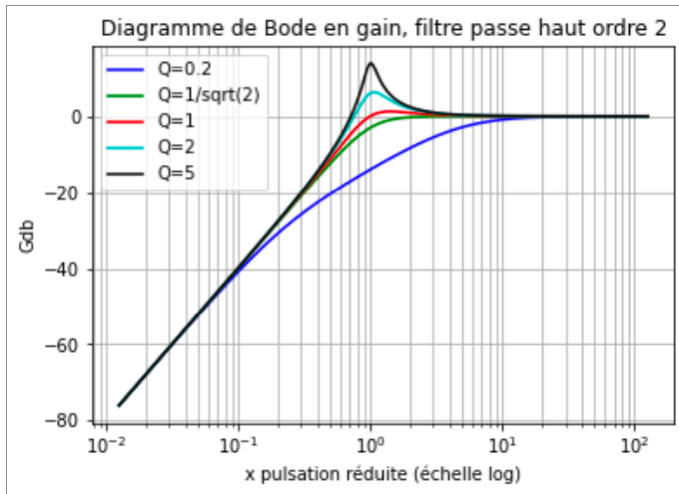
4-5 Filtre passe bas du 2^{ème} ordre

$$H(j\omega) = \frac{A_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} = \frac{A_0}{1 - X^2 + j \frac{X}{Q}}, A_0 \text{ réel}$$



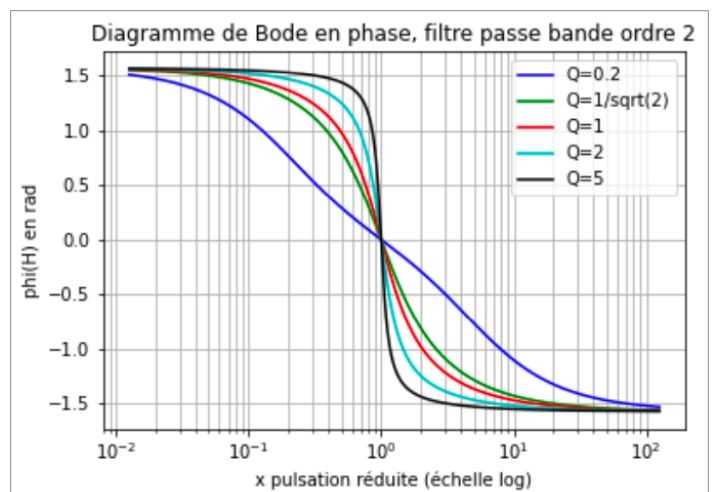
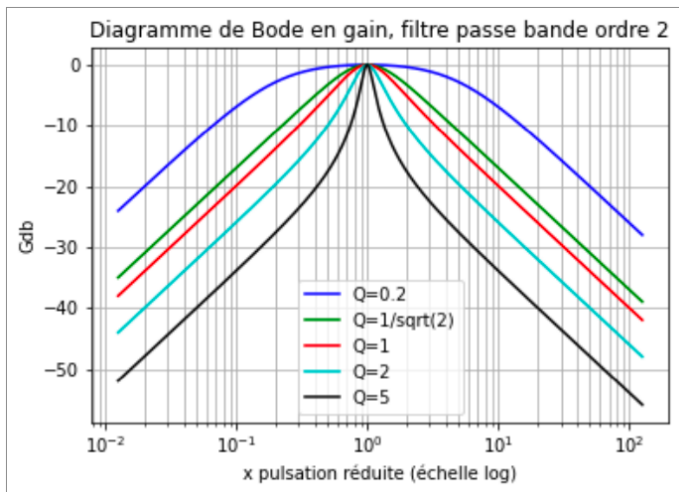
4-6 Filtre passe haut du 2^{ème} ordre

$$\underline{H}(j\omega) = -A_0 \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} = -A_0 \frac{x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}, A_0 \text{ réel}$$



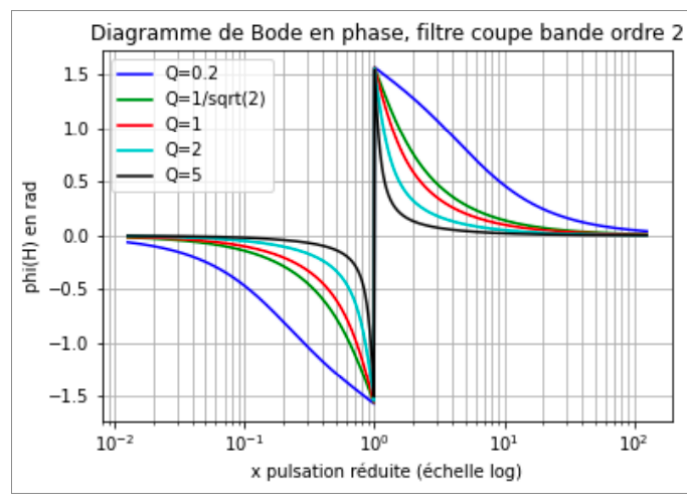
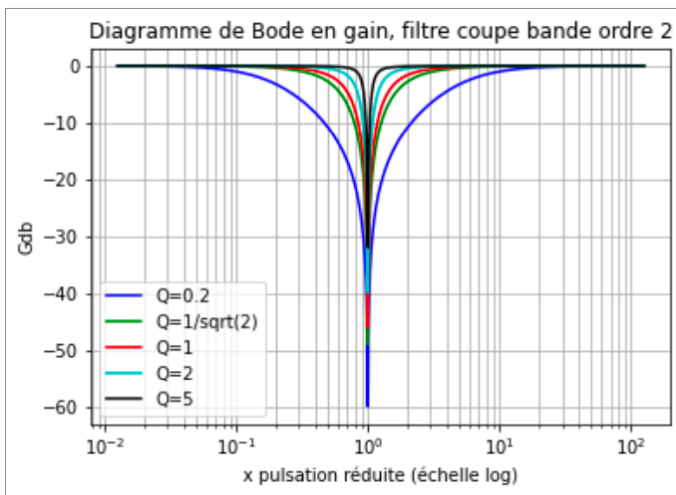
4-7 Filtre passe bande du 2^{ème} ordre

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0 j \frac{\omega}{Q \omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} = \frac{A_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{A_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}, A_0 \text{ réel}$$



4-8 Filtre coupe bande du 2^{ème} ordre

$$H(j\omega) = A_0 \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} = A_0 \frac{(1 - x^2)}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$



Il faut noter ici que la phase est discontinue en $x=1$!

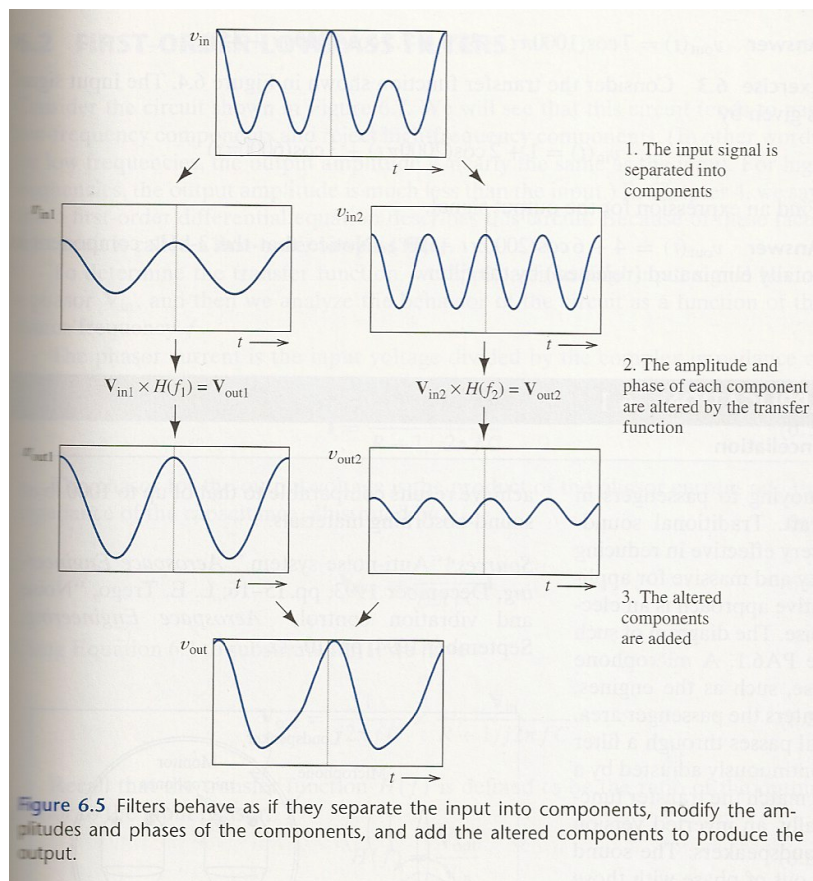
V – FILTRAGE D'UN SIGNAL PERIODIQUE

5-1 Introduction

Nous avons déjà noté le rôle important joué par les signaux sinusoïdaux. Un signal sinusoïdal appliqué à l'entrée d'un système linéaire (mécanique, électrique, optique etc...) répond par un signal de même forme et de même pulsation. On comprend alors l'intérêt qu'il y a à **décomposer un signal périodique quelconque en une somme de composantes sinusoïdales** (cf. figure suivante) :

- ✓ La réponse de chacune est connue grâce à la fonction de transfert.
- ✓ Il suffit de sommer ces réponses pour obtenir le signal de sortie résultant.

Bien sûr, ceci n'est possible que parce que les systèmes que l'on étudie sont **linéaires** et qu'ils vérifient le **principe de superposition des signaux** (cf. cours sur les ondes mécaniques).



5-2 Décomposition d'un signal périodique en séries de Fourier

C'est en étudiant l'écoulement de la chaleur que Fourier découvrit qu'une fonction périodique non-sinusoidale peut être exprimée comme une somme infinie de fonctions sinusoidales. Rappelons qu'une fonction périodique dans le temps se répète toutes les T secondes. Une fonction $f(t)$ périodique vérifie :

$$f(t) = f(t + nT) \text{ avec } n \text{ entier (fonction périodique)}$$



Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) est un mathématicien et physicien Français qui présenta pour la première fois les séries et les transformées qui portent son nom. Ces travaux, qui jouent toujours à l'heure actuelle un rôle de premier plan, furent mal accueillis à leur époque par la communauté scientifique.

Il est né à Auxerre et fût orphelin dès l'âge de 8 ans. Il reçut une éducation dans un collège militaire où l'on remarqua ses talents en mathématiques. Il participa à la Révolution Française. Il échappa de justesse à la guillotine sous la Terreur. Il participa à la campagne d'Egypte de Napoléon. Il fût Préfet de l'Isère et il permit à ce titre la construction de la route Grenoble-Briançon par le col du Lautaret.

D'après le théorème de Fourier, toute fonction périodique (satisfaisant certains critères de continuités etc...) de pulsation (ou fréquence angulaire) ω peut être exprimée comme une somme infinie de sinus et de cosinus dont les pulsations sont des multiples entiers de ω . Ainsi $f(t)$ peut s'écrire :

Série de Fourier d'un signal périodique

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{a_0}_{\text{valeur moyenne ou composante continue : dc}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]}_{\text{partie harmonique (ou alternative) : ac}} \\ \updownarrow \\ \underbrace{a_0}_{\text{valeur moyenne ou composante continue : dc}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t + \phi_n)]}_{\text{partie harmonique (ou alternative) : ac}} \end{array} \right.$$

→ $\omega = 2\pi/T$ est la **pulsation du fondamental**.

→ $\omega_n \equiv n\omega$ est la **pulsation de l'harmonique de rang n** .

Les coefficients a_0 , a_n et b_n se calculent par les relations (admises) suivantes :

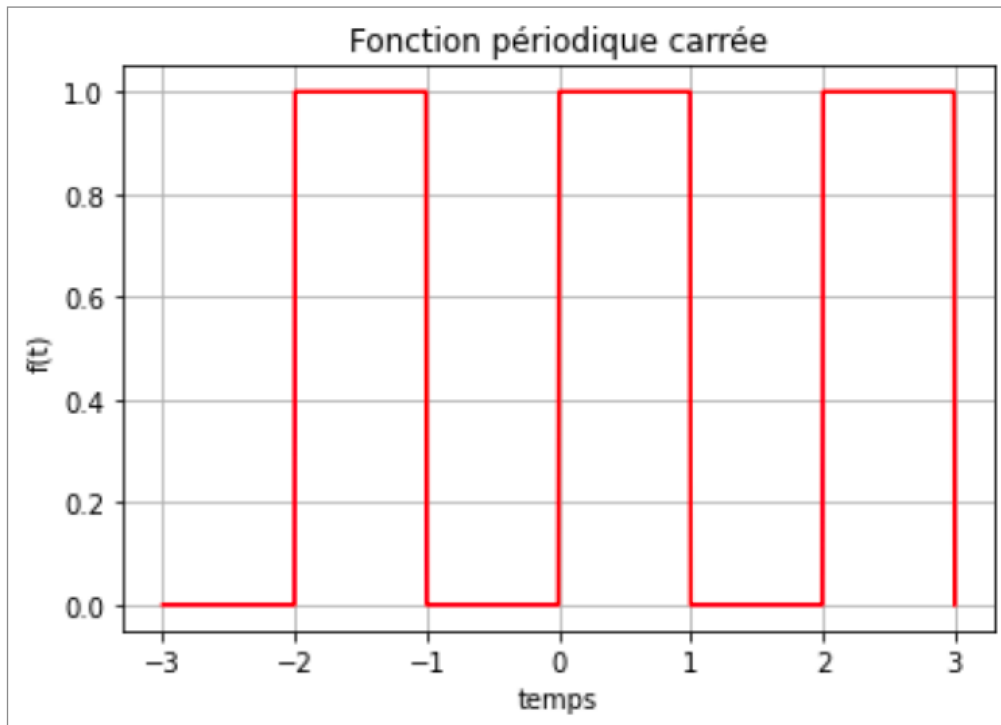
Calcul des coefficients de la série de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \phi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

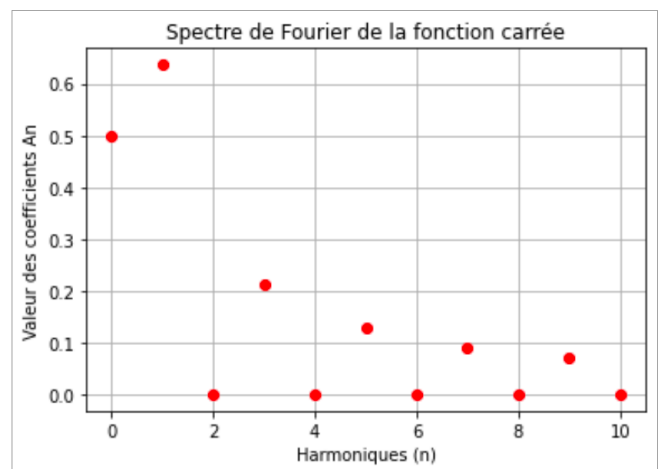
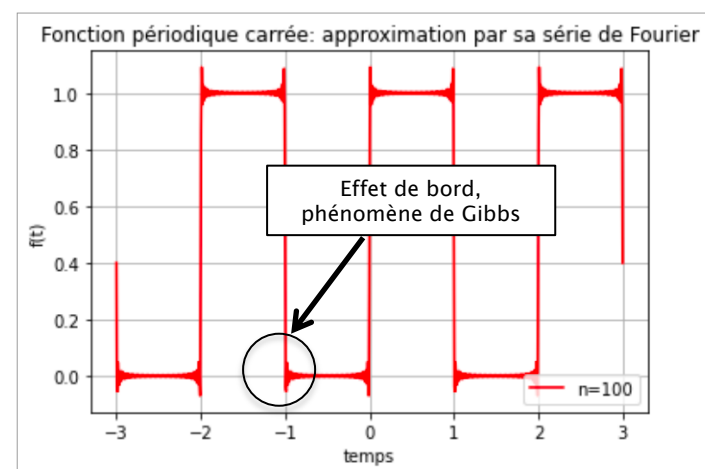
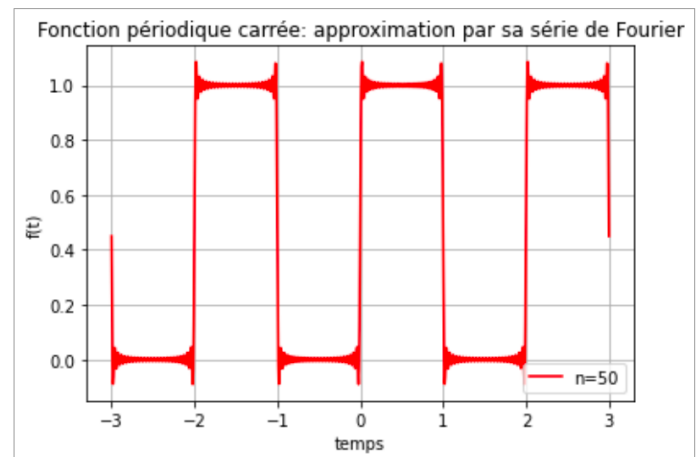
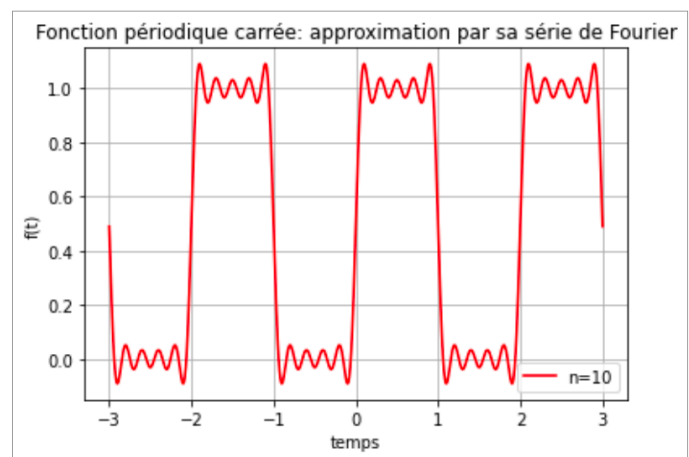
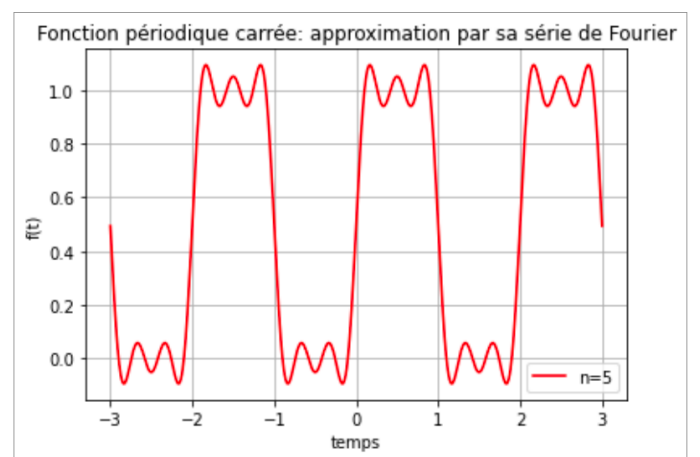
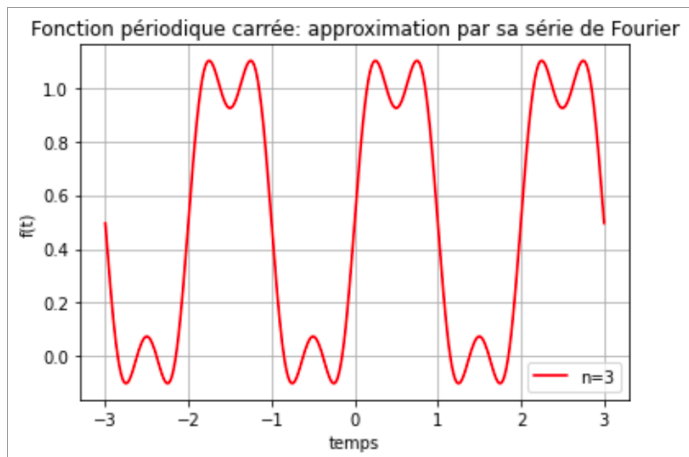
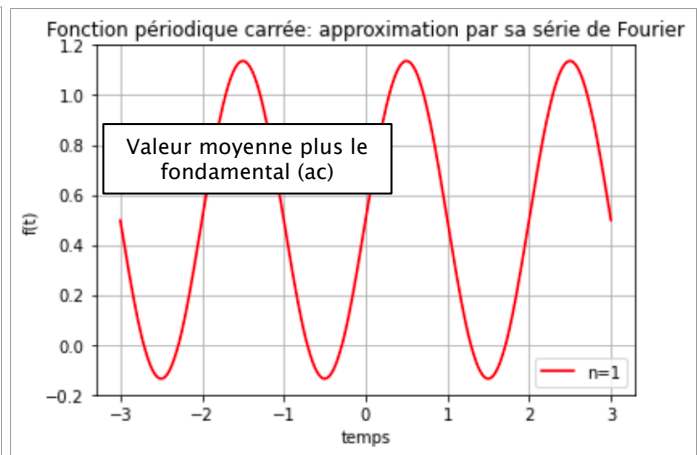
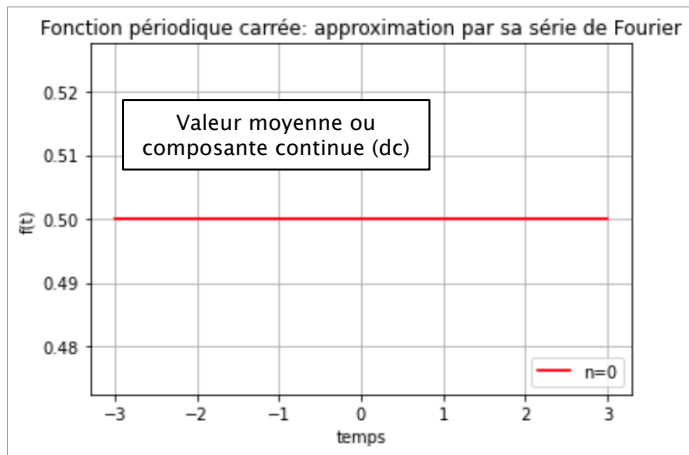
Le calcul des coefficients de Fourier à la main (cf. exemple suivant) peut être vite pénible, l'utilisation de l'outil informatique, comme Python, est particulièrement recommandée dans ce cas. On considère l'exemple de la fonction périodique carrée suivante obtenue avec Python (pas si simple à obtenir ! cf. les codes en annexe).



Vous pouvez vérifier vous même (cf. exercice d'application 3) que sa série de Fourier s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\pi t) + \frac{2}{3\pi} \sin(3\pi t) + \frac{2}{5\pi} \sin(5\pi t) + \dots$$

Les figures suivantes montrent l'allure du signal lorsque que l'on ajoute successivement les termes de la série de Fourier. Nous avons encore une fois utilisé Python et la méthode des rectangles pour les intégrations numériques. Avec seulement les 5 premiers termes de la série, on commence à avoir la forme d'un signal périodique carré. Avec 10 termes, nous sommes déjà « proches » du signal carré.



On constate que la fonction périodique carrée est impaire ($f(-t) = -f(t)$) et que sa série de Fourier ne possède que des fonctions sinus qui sont impaires. Il s'agit là d'un résultat tout à fait général :

✓ Si la fonction périodique $f(t)$ est **impaire**, $f(-t) = -f(t)$, sa série de Fourier ne contiendra que des termes en sinus.

✓ Si la fonction périodique $f(t)$ est **paire**, $f(-t) = f(t)$, sa série de Fourier ne contiendra que des termes en cosinus.

La dernière figure de la page précédente représente **LE SPECTRE DE FOURIER** du signal périodique carré. Il s'agit d'une représentation très pratique et souvent utilisée dans l'étude des signaux. On reporte la valeur de l'amplitude A_n de chaque harmonique (ainsi que le fondamental) en fonction de la pulsation de ce même harmonique ω_n . La connaissance du spectre de Fourier d'un signal est importante pour comprendre le rôle d'un filtre sur ce signal comme nous allons le voir.

Exercice d'application 3: Calcul de la série de Fourier d'un signal carré

a) Déterminer la série de Fourier du signal.

b) Calculer les coefficients A_n du spectre de Fourier.

5-3 Applications

a) Filtre passe-bas

Nous avons calculé la pulsation de coupure du filtre passe-bas RC, $\omega_c = 1/RC$ (qui est aussi la pulsation caractéristique du filtre). Attention, il ne faut pas confondre la pulsation caractéristique du filtre avec la pulsation du fondamental du signal périodique d'entrée, les mêmes notations sont utilisées !.

Un filtre passe-bas ne va laisser passer que la composante continue dc (valeur moyenne) et les composantes de basses pulsations du signal périodique d'entrée.

✓ En rendant ω_c assez importante ($\omega_c \gg \omega$), en prenant par exemple C faible, un grand nombre d'harmoniques va passer et se retrouver à la sortie du filtre (cf. figure a ci-dessous). Nous aurons à la sortie un signal carré déformé qui peut ressembler à la quatrième courbe de la figure 17.2 par exemple.

✓ Au contraire, si l'on rend ω_c faible ($\omega_c \ll \omega$), on peut bloquer toutes les harmoniques, seul la composante continue du signal va passer (cf. figure a ci-dessous). Ainsi si l'on envoie à l'entrée du filtre le signal carré déjà étudié, nous aurons en sortie du filtre sa valeur moyenne !

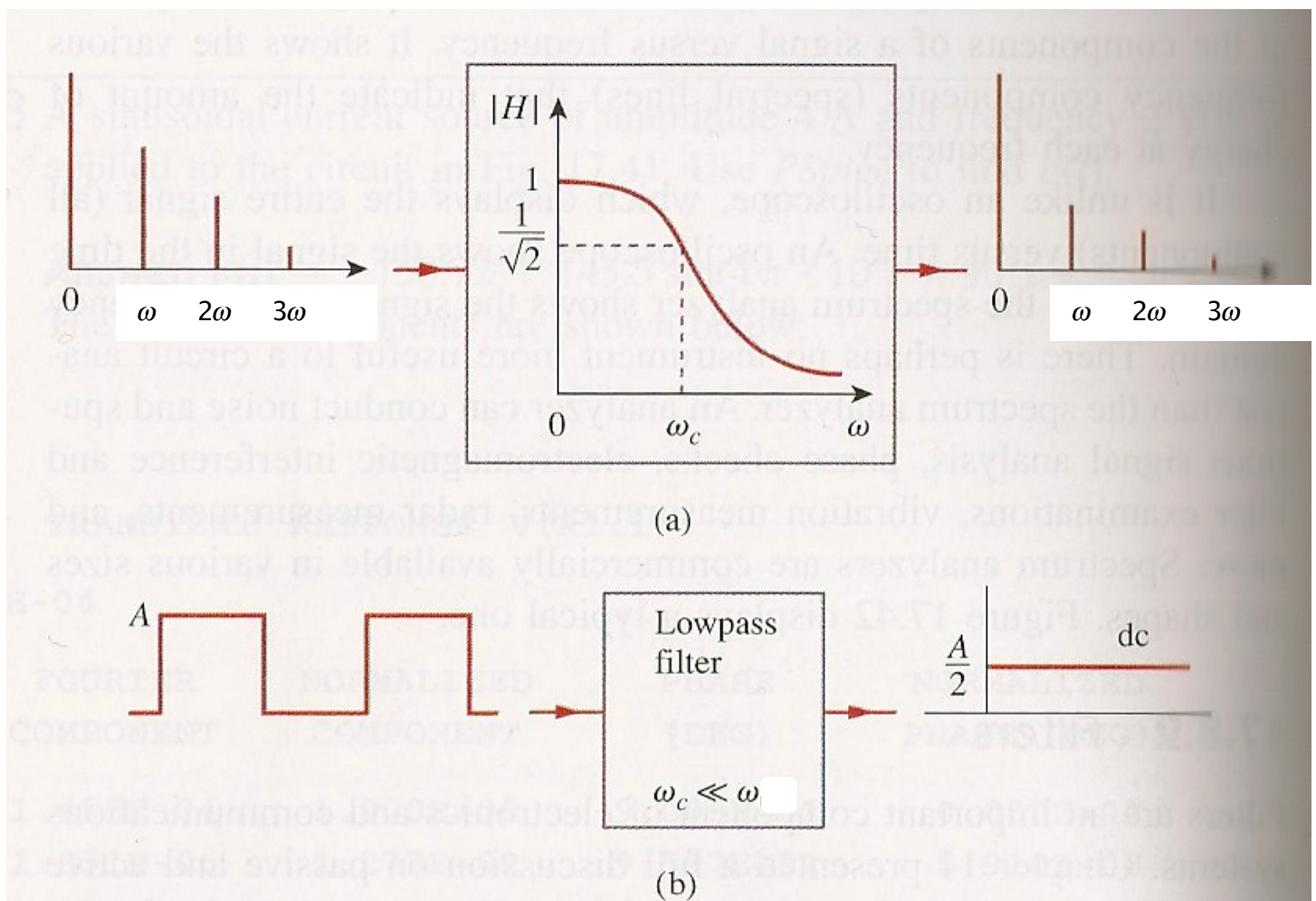


Figure 17.43

(a) Input and output spectra of a lowpass filter, (b) the lowpass filter passes only the dc component when $\omega_c \ll \omega$

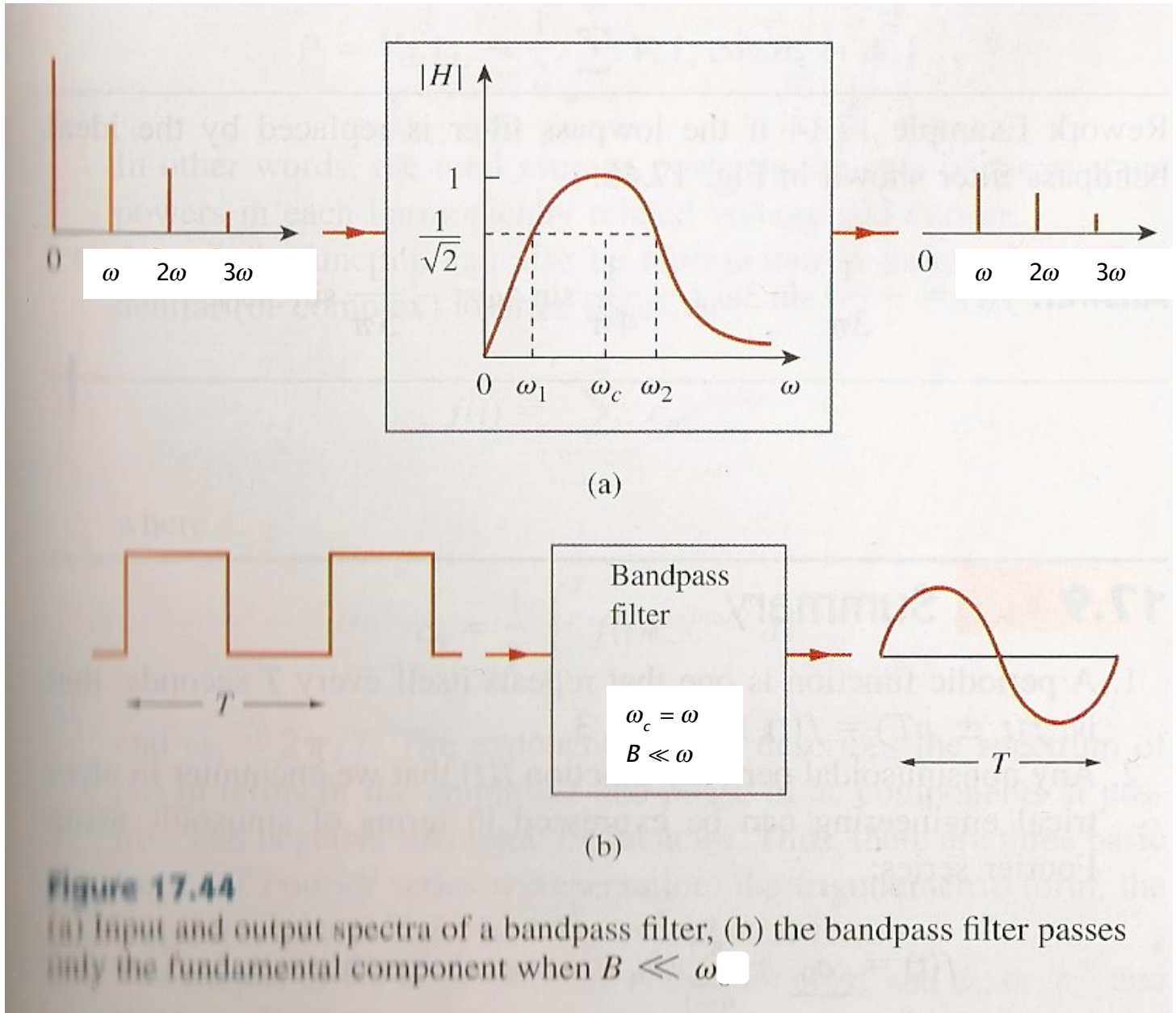
b) Filtre passe-bande

Considérons à présent un filtre passe-bande centré sur la pulsation ω_c et de largeur $B \equiv \omega_2 - \omega_1$.

Le filtre va laisser passer toutes les harmoniques dont les pulsations ω telles que $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

✓ Sur la figure a) ci-dessous le filtre est tel que $[\omega, 2\omega, 3\omega] \in B$. Le filtre va, dans les grandes lignes, éliminer la composante continue dc du signal d'entrée (on coupe l'offset).

✓ Sur la figure b) ci-dessous le filtre est rendu très sélectif, $B \ll \omega_c$ et on choisi $\omega_c = \omega$ la valeur du fondamental du signal d'entré. Le filtre va ne laisser passer que le fondamental ($n = 1$). Ainsi si l'on prend de nouveau comme signal d'entrée le signal carré, on aura en sortie un signal presque purement sinusoïdal de pulsation ω .



On pourra retenir de façon générale :

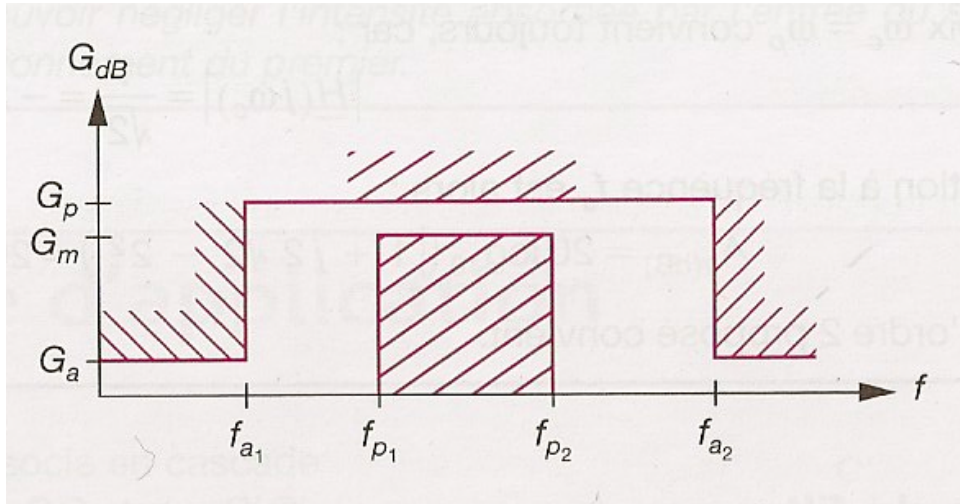
✓ Les composantes spectrales situées dans la bande très atténuée d'un filtre ont une contribution négligeable en sortie.

✓ Un signal dont les composantes spectrales sont situées dans la bande passante du filtre est peu modifié.

5-3 Notion de gabarit

Le point de départ de la réalisation d'un filtre est la définition de la **bande passante**. Il s'agit de l'intervalle de fréquence correspondant aux composantes harmoniques que le filtre doit laisser passer. Mais puisqu'il n'est pas possible d'atténuer totalement les signaux dont la fréquence se trouve en dehors de cet intervalle, le cahier des charges doit stipuler un intervalle, appelé **bande atténuée**, dans lequel le gain du filtre doit être inférieur à une limite.

Toutes ces prescriptions se résument dans une représentation en échelle logarithmique appelée **GABARIT DU FILTRE** (cf. figure suivante).



Si l'on souhaite réaliser un filtre passe-bande, le gabarit ci-dessus précise :

✓ L'intervalle $[f_{p1}, f_{p2}]$ définissant la **bande passante**, dans laquelle le gain du filtre doit rester compris entre deux limites : $G_m \leq G_{dB} \leq G_p$ où G_p désigne le gain nominal dans la bande passante et $G_p - G_m$ la variation maximale tolérée dans cette bande.

✓ le domaine de **bande atténuée**, réunion de $[0, f_{a1}]$ et de $[f_{a2}, \infty]$ dans lequel le gain du filtre doit rester inférieur à G_a .

C'est donc dans les intervalles $[f_{a1}, f_{p1}]$ et $[f_{p2}, f_{a2}]$, appelés **zone de transition**, que le gain du filtre varie rapidement avec la fréquence (ou pulsation). Dans des applications réelles, on rencontre couramment des variations de plusieurs dizaines de décibels dans moins d'une décade.

Exercice d'application 4: Gabarit d'un filtre passe-bas

Un dispositif de traitement de signaux acoustiques nécessite la séparation de composantes sonores et ultrasonores. On réalise un filtre passe-bas, de fréquence de coupure 20 kHz, dont le gain nominal est égal à 0 dB. La variation dans la bande passante est limitée à 3 dB (c'est-à-dire l'écart toléré par rapport au gain maximal) et on impose qu'à partir de la fréquence de 40 kHz, l'atténuation $A_{dB} \equiv G_{p-dB} - G_{dB}$ soit supérieure à 10 dB.

a) Représenter le gabarit de ce filtre.

b) Un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 20$ kHz convient-il ?

c) Même question avec la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\sqrt{2}(\omega/\omega_c) - (\omega/\omega_c)^2}$ où

$\omega_c = 2\pi f_c$ avec $f_c = 20$ kHz.

Obtention des diagrammes de Bode pour les filtres d'ordre 1

```

from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Fonction de transfert à étudier en pulsation
def H1(w):
    R,C=1e3,0.2e-6
    H0,w0=1,1/(R*C)
    return H0/(1+1j*w/w0)

#Fonction de transfert à étudier en pulsation réduite
def H2(x):
    H0=1
    return H0/(1+1j*x)

#Fonction pour obtenir les diagrammes de Bode
def Bode(H,wmin,wmax):
    R,C=1e3,0.2e-6
    w0=1/(R*C)
    n=1000
    #Abcisse en log de la pulsation réduite
    x=np.logspace(log(wmin/w0)/log(10),log(wmax/w0)/log(10),n)
    #Abcisse en log de la pulsation
    #x=np.logspace(log(wmin)/log(10),log(wmax)/log(10),n)
    z=np.zeros(n,dtype=complex)
    GdB=np.zeros(n)
    phi=np.zeros(n)
    for i in range (n) :
        z[i]=H(x[i])
        #fonction abs de Numpy, calcul du module d'un complexe
        GdB[i]=20*np.log(np.abs(z[i]))/log(10)
        #fonction angle de Numpy, calcul de l'argument (phase) d'un complexe
        phi[i]=np.angle(z[i])

    plt.figure(1)
    #plt.xlabel('w (échelle log)', size=10)
    plt.xlabel('x pulsation réduite (échelle log)', size=10)
    plt.ylabel('Gdb', size=10)
    plt.title('Diagramme de Bode en phase, filtre passe bas ordre 1')
    plt.semilogx(x,GdB,"-r")
    plt.grid(which="both")
    plt.figure(2)
    #plt.xlabel('w (échelle log)', size=10)
    plt.xlabel('x pulsation réduite (échelle log)', size=10)
    plt.ylabel('phi(H) en rad', size=10)
    plt.semilogx(x,phi,"-r")
    plt.title('Diagramme de Bode en phase, filtre passe bas ordre 1')
    plt.grid(which="both")
    plt.show()
    return None

# Pulsation minimale et pulsation maximale pour le domaine d'étude
wmin=2*pi*10
wmax=2*pi*100e3
#Appel de la fonction Bode
Bode(H2,wmin,wmax)

```

Obtention des diagrammes de Bode pour les filtres d'ordre 2

```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Fonction de transfert à étudier en pulsation réduite
def H(x,Q):
    H0=1
    return (H0*(1-x**2))/(1-x**2+1j*(1/Q)*x)

#Calcul du gain en décibel et de la phase de la fonction de transfert
def Bode(H,Q,wmin,wmax):
    R,C=1e3,0.2e-6
    w0=1/(R*C)
    n=1000
    x=np.logspace(log(wmin/w0)/log(10),log(wmax/w0)/log(10),n)
    z=np.zeros(n,dtype=complex)
    GdB=np.zeros(n)
    phi=np.zeros(n)
    for i in range(n):
        z[i]=H(x[i],Q)
        GdB[i]=20*np.log(np.abs(z[i]))/log(10)
        phi[i]=np.angle(z[i])
    return x,GdB,phi

# Pulsation minimale et pulsation maximale pour le domaine d'étude
wmin=2*pi*10
wmax=2*pi*100e3
#Choix des différents facteurs de qualité
Q1=0.2
Q2=1/sqrt(2)
Q3=1
Q4=2
Q5=5
x1,GdB1,phi1=Bode(H,Q1,wmin,wmax)
x2,GdB2,phi2=Bode(H,Q2,wmin,wmax)
x3,GdB3,phi3=Bode(H,Q3,wmin,wmax)
x4,GdB4,phi4=Bode(H,Q4,wmin,wmax)
x5,GdB5,phi5=Bode(H,Q5,wmin,wmax)

plt.figure(1)
plt.xlabel('x pulsation réduite (échelle log)', size=10)
plt.ylabel('Gdb', size=10)
plt.title('Diagramme de Bode en gain, filtre coupe bande ordre 2')
plt.semilogx(x1,GdB1,"-b")
plt.semilogx(x2,GdB2,"-g")
plt.semilogx(x3,GdB3,"-r")
plt.semilogx(x4,GdB4,"-c")
plt.semilogx(x5,GdB5,"-k")
plt.legend(['Q=0.2','Q=1/sqrt(2)','Q=1','Q=2','Q=5'],fontsize=10)
plt.grid(which="both")

plt.figure(2)
plt.xlabel('x pulsation réduite (échelle log)', size=10)
plt.ylabel('phi(H) en rad', size=10)
plt.title('Diagramme de Bode en phase, filtre coupe bande ordre 2')
plt.semilogx(x1,phi1,"-b")
plt.semilogx(x2,phi2,"-g")
plt.semilogx(x3,phi3,"-r")
plt.semilogx(x4,phi4,"-c")
plt.semilogx(x5,phi5,"-k")
plt.legend(['Q=0.2','Q=1/sqrt(2)','Q=1','Q=2','Q=5'],fontsize=10)
plt.grid(which="both")
plt.show()
```

Calcul d'une série de Fourier d'une fonction périodique, spectre de Fourier

```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Obtention d'une fonction périodique par prolongement
#lf-li définie la période de la fonction
def periodique_f(li,lf,f,t):
    if t>=li and t<=lf :
        return f(t)
    elif t>lf:
        t_new=t-(lf-li)
        #La fonction s'auto-appelle, récursivité !!
        return periodique_f(li,lf,f,t_new)
    elif t<li:
        t_new=t+(lf-li)
        return periodique_f(li,lf,f,t_new)

#Définition de la fonction carré sur une période
def carre(t):
    if t>=0 and t<1:
        s=1
    elif t>=1 and t<2:
        s=0
    return s

#définition de la fonction carré sur plusieurs périodes, prolongement
def carre_P(t):
    return periodique_f(li,lf,carre,t)

#Calcul de l'intégrale d'une fonction g de a à b, méthode des rectangles
# n pas de calcul
def rectangle(g,a,b,n):
    h=(b-a)/n
    somme=0
    for k in range (0,n):
        somme=somme+g(a+k*h)
    R=h*somme
    return R

#Calcul de l'intégrale de g*cos de a à b, méthode des rectangles
# n pas de calcul
def rectanglecos(g,a,b,n,N):
    h=(b-a)/n
    somme=0
    for k in range (0,n):
        somme=somme+g(a+k*h)*cos(N*2*pi*(a+k*h)/T)
    R=h*somme
    return R

#Calcul de l'intégrale de g*sin de a à b, méthode des rectangles
# n pas de calcul
def rectanglesin(g,a,b,n,N):
    h=(b-a)/n
    somme=0
    for k in range (0,n):
        somme=somme+g(a+k*h)*sin(N*2*pi*(a+k*h)/T)
    R=h*somme
    return R
```

```

#Calcul des coefficients a0, an, bn et An de la série de Fourier
def spectre_amplitude(g,T,nmax) :
    harmonique=[0]
    A=[0]
    B=[0]
    A0=(1/T)*rectangle(g,0,T,10**3)
    C=[(1/T)*rectangle(g,0,T,10**3)]
    for N in range(1,nmax+1):
        an=(2/T)*rectanglecos(g,0,T,10**3,N)
        bn=(2/T)*rectanglesin(g,0,T,10**3,N)
        harmonique.append(N)
        A.append(an)
        B.append(bn)
        C.append(sqrt(an**2+bn**2))
    return A0,A,B,C,harmonique

#Calcul de la série de Fourier
def fourier(t,f,nmax):
    A0,A,B,C,harmonique=spectre_amplitude(carre,1/f,nmax)
    somme=A0
    for N in range(1,nmax+1):
        somme=somme+A[N]*np.cos(N*2*pi*f*t)+B[N]*np.sin(N*2*pi*f*t)
    return somme

#Période de la fonction carré
li=0
lf=2
T=lf-li
f=1/T
#Nombre de valeur (harmoniques) de la série de Fourier
nmax=10

temps=np.linspace(-3,3,1000)
fonction=np.zeros(len(temps))
serie=np.zeros(len(temps))

A0,A,B,C,harmonique=spectre_amplitude(carre,T,nmax)
for i in range(len(temps)):
    fonction[i]=carre_P(temps[i])
    serie[i]=fourier(temps[i],f,nmax)

#Graphe de la fonction carré
plt.grid()
plt.plot(temps,fonction,'r-',markersize=3)
plt.xlabel('temps', size=10)
plt.ylabel('f(t)', size=10)
plt.title('Fonction périodique carrée')
plt.show()

#Graphe de la série de Fourier correspondante pour nmax
plt.grid()
plt.plot(temps,serie,'r-',markersize=3)
plt.xlabel('temps', size=10)
plt.ylabel('f(t)', size=10)
plt.legend(['n=100'],loc='lower right',fontsize=10)
plt.title('Fonction périodique carrée: approximation par sa série de Fourier')
plt.show()

#Graphe du spectre de Fourier correspondant pour nmax
plt.grid()
plt.plot(harmonique,C,'or')
plt.ylabel('Valeur des coefficients An', size=10)
plt.title('Spectre de Fourier de la fonction carrée')
plt.show()

```