

# CIRCUITS LINEAIRES EN REGIME SINUSOIDAL FORCE CIRCUIT RLC ET RESONANCE

« Je suis végétarien et anti-alcoolique : ainsi je peux faire un meilleur usage de mon cerveau »  
Thomas Edison (1847-1931)

Nous allons étudier la réponse des circuits soumis à un signal ( $i(t)$  ou  $u(t)$ ) de **forme sinusoïdale**, on parle de signaux alternatifs (AC). Ces signaux jouent un rôle très important dans les sciences physiques:

- Ils sont présents dans de nombreux domaines (oscillations mécaniques, physiques des ondes, optique, physique quantique, électricité...)
- Ils sont faciles à générer. EDF transporte l'énergie électrique sous formes de signaux sinusoïdaux. Dans les télécoms, les informations sont transportées par des ondes électromagnétiques de forme sinusoïdale (ou plutôt par une somme d'ondes sinusoïdales).
- On montre en mathématiques (analyse de Fourier) que tout signal périodique peut s'écrire comme une somme infinie de fonctions sinusoïdales d'où le rôle universel joué par ces dernières. De plus, elles sont faciles à manipuler (dériver, intégrer...).

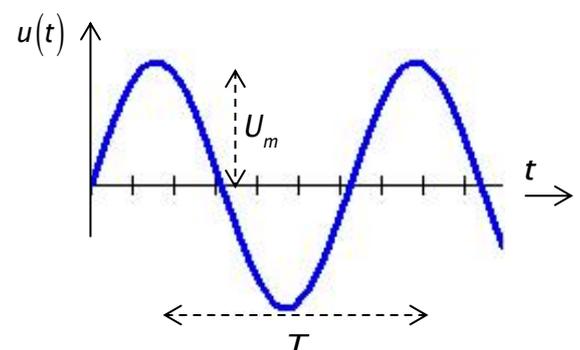
## I – Signal sinusoïdal

Nous allons travailler sur l'exemple de  $u(t)$ , nous pourrions faire la même chose avec  $i(t)$ . Un signal sinusoïdal s'écrit sous la forme :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$U_m \equiv$  amplitude (en V),  $\omega \equiv$  pulsation (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ),  
 $\varphi \equiv$  phase à l'origine (sans unité). La période  $T$  (en s) de ce signal et la fréquence  $f$  (en Hz) sont reliées à la pulsation par :

$$T \equiv \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

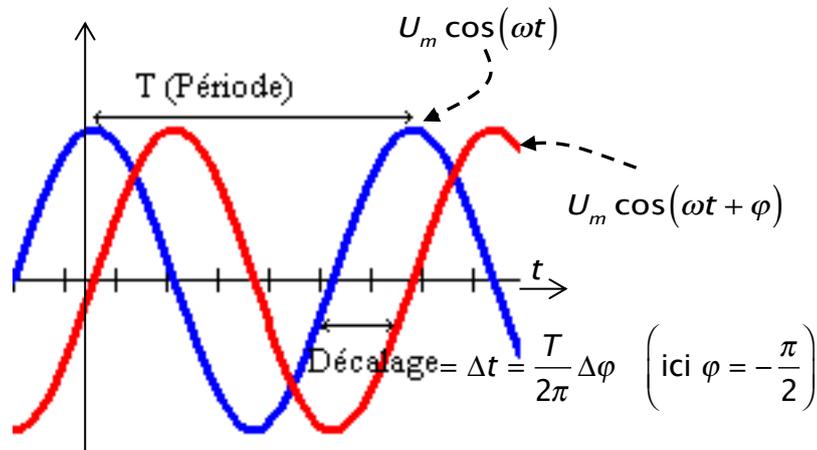


Dans ce cours, nous travaillons avec la fonction cosinus mais nous pouvons utiliser, de façon équivalente, la fonction sinus. La différence entre les deux fonctions correspond simplement à un déphasage de  $\pi/2$ .

- **Périodicité**:  $u(t+T) = u(t)$

$u(t+T) = U_m \cos(\omega(t+T) + \varphi) = U_m \cos(\omega t + \omega T + \varphi) = U_m \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = U_m \cos(\omega t + \varphi) = u(t)$  car la fonction cosinus est périodique de période  $2\pi$ .

- **Déphasage entre deux signaux synchrones (de même pulsation)**



Soit  $u_1(t) = U_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2)$  deux signaux synchrones.  $u_1$  et  $u_2$  sont

maximales quand  $\omega t_1 + \varphi_1 = \omega t_2 + \varphi_2 = 0$  soit  $\Delta t \equiv t_2 - t_1 = \frac{1}{\omega} \left( \underbrace{\varphi_1 - \varphi_2}_{\equiv \Delta\varphi} \right)$ . On retiendra le résultat

pratique suivant :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T} \Delta t$$

- **Rappels de trigonométrie**

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \\ \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \sin(\omega t \pm \pi) &= -\sin \omega t \\ \cos(\omega t \pm \pi) &= -\cos \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \pm \cos \omega t \\ \cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \mp \sin \omega t \end{aligned}$$

## II – Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

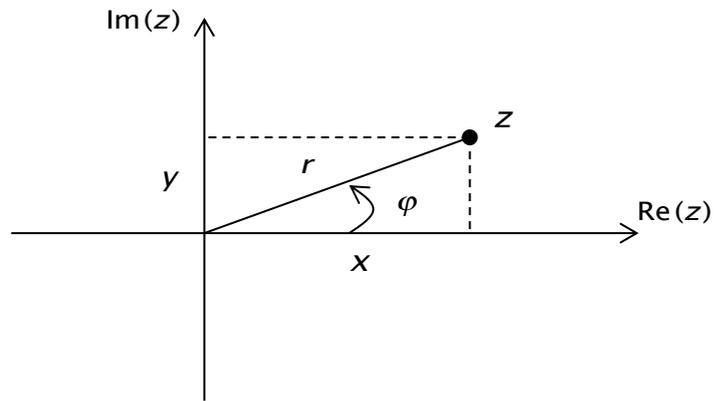
Il s'agit d'un outil mathématique très puissante dans notre étude des circuits électriques.

### 2.1 Rappels sur les nombres complexes

En sciences physiques, il est d'usage d'écrire  $j^2 = -1$  car la lettre  $i$  est déjà utilisée pour désigner l'intensité du courant électrique.

Soit  $z$  un nombre complexe, on peut l'écrire sous trois formes équivalentes :

{ forme **rectangulaire** :  $z = x + jy$   
 { forme **polaire** :  $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$   
 { forme **exponentielle** :  $z = re^{j\varphi}$   
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  (le module)  
 $\tan\varphi = \frac{y}{x}$  (la phase ou argument)  
 $x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$



- Si  $z = z_1 z_2$  alors  $z = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- Si  $z = z_1 / z_2$  alors  $z = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- $\bar{z} = r e^{-j\varphi} = x - jy$
- Si  $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

## 2.2 Représentation complexe d'une tension (d'une intensité) périodique

Soit  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ . On peut écrire que  $u(t) = \text{Re}(U_m e^{j(\omega t + \varphi)})$ . Nous allons associer à la tension  $u(t)$  un nombre complexe  $\underline{U}$  appelé **amplitude complexe** (phasor en anglais) défini par :

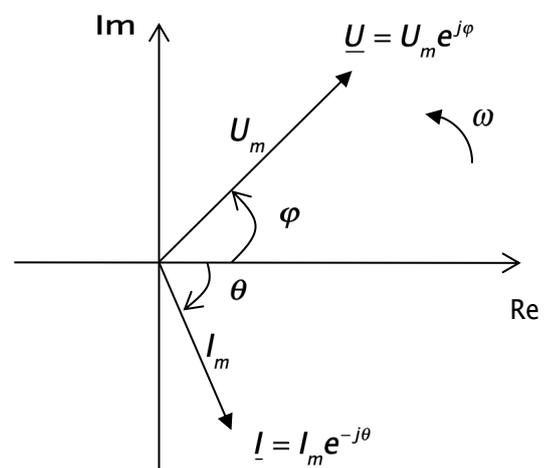


Définition de l'amplitude complexe:  $\underline{U} = U_m e^{j\varphi}$

$\underbrace{u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{REPRESENTATION TEMPORELLE}} \Leftrightarrow$	$\underbrace{\underline{U} = U_m e^{j\varphi}}_{\text{REPRESENTATION COMPLEXE}}$
$\Downarrow$	
$u(t) = \text{Re}(\underline{U} e^{j\omega t})$	

Nous verrons que dans un circuit en régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs électriques oscillent à la même pulsation  $\omega$  en régime permanent. Par contre **l'amplitude** et la **phase** seront propres à chaque grandeur, c'est pourquoi la grandeur pertinente à étudier est **l'amplitude complexe**  $U_m e^{j\varphi}$ . Notre travail principal sera la détermination de l'amplitude  $U_m$  et de la phase  $\varphi$ .

L'amplitude complexe a donc une amplitude (une norme) et une phase (direction), elle se comporte comme un vecteur.



On peut donc représenter une amplitude complexe par un vecteur dans un **diagramme dit de Fresnel** (figure ci-dessus). Sur ce dernier, l'amplitude complexe  $\underline{U}$  est une « photo » à l'instant  $t = 0$  du nombre complexe  $\underline{U}e^{j\omega t}$ , dont la partie réelle correspond à  $u(t)$ . Ainsi, dans le plan complexe,  $\underline{U}e^{j\omega t}$  a un mouvement de rotation à la vitesse angulaire  $\omega$  dans le sens trigonométrique.

### **2.3 Dérivation et intégration dans le domaine complexe**

#### **a) dérivation**

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(U_m \cos(\omega t + \varphi)) = -\omega U_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega U_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{Re}\left(\omega U_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} e^{j\frac{\pi}{2}}\right).$$

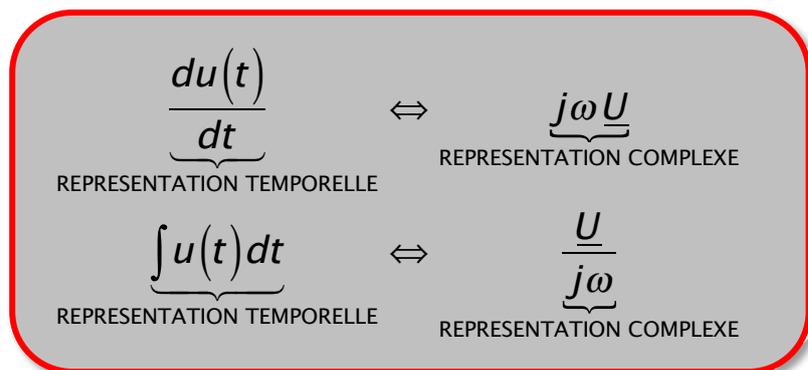
Comme  $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ ,  $\frac{du(t)}{dt} = \text{Re}(j\omega \underline{U} e^{j\omega t})$ . L'amplitude complexe associée à  $\frac{du(t)}{dt}$  correspond à  $j\omega \underline{U}$ .

#### **b) Intégration**

$$\int u(t) dt = \frac{U_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{U_m}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \text{Re}\left(\frac{U_m}{\omega} e^{j\omega t} e^{j\varphi} e^{-j\frac{\pi}{2}}\right).$$

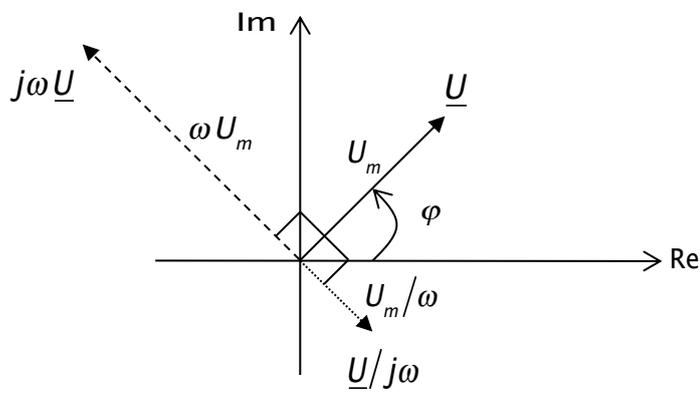
Comme  $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$ ,  $\int u(t) dt = \text{Re}\left(\frac{\underline{U}}{j\omega} e^{j\omega t}\right)$ . L'amplitude complexe associée à  $\int u(t) dt$  correspond à  $\frac{\underline{U}}{j\omega}$ .

#### **c) Conclusion**



Dans le domaine complexe, les opérations dérivations et intégrations sont beaucoup plus simples, ils suffit respectivement de **multiplier** par  $j\omega$  et de **diviser** par  $j\omega$  l'amplitude complexe.

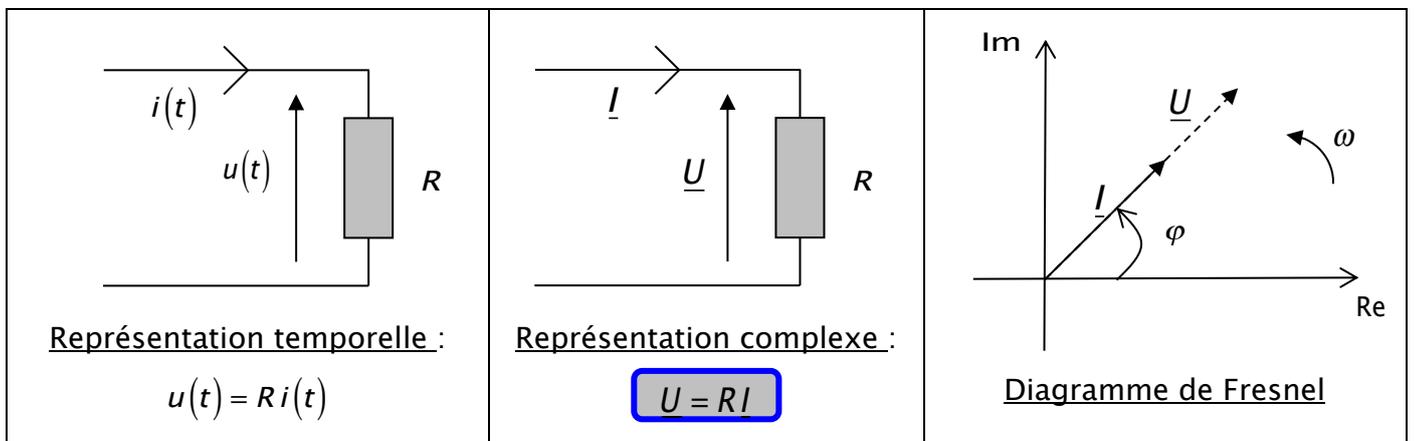
Sur le diagramme de Fresnel ci-dessous on a représenté les amplitudes complexes  $\underline{U}$ ,  $j\omega \underline{U}$  et  $\frac{\underline{U}}{j\omega}$ .  $j\omega \underline{U}$  est **avance** de  $\pi/2$  sur  $\underline{U}$ .  $\underline{U}/j\omega$  est en **retard** de  $\pi/2$  sur  $\underline{U}$ .



### III – Loi d’Ohm en notation complexe, admittance et impédance

On travaille dans ce paragraphe en convention récepteur.

#### 3.1 Résistance

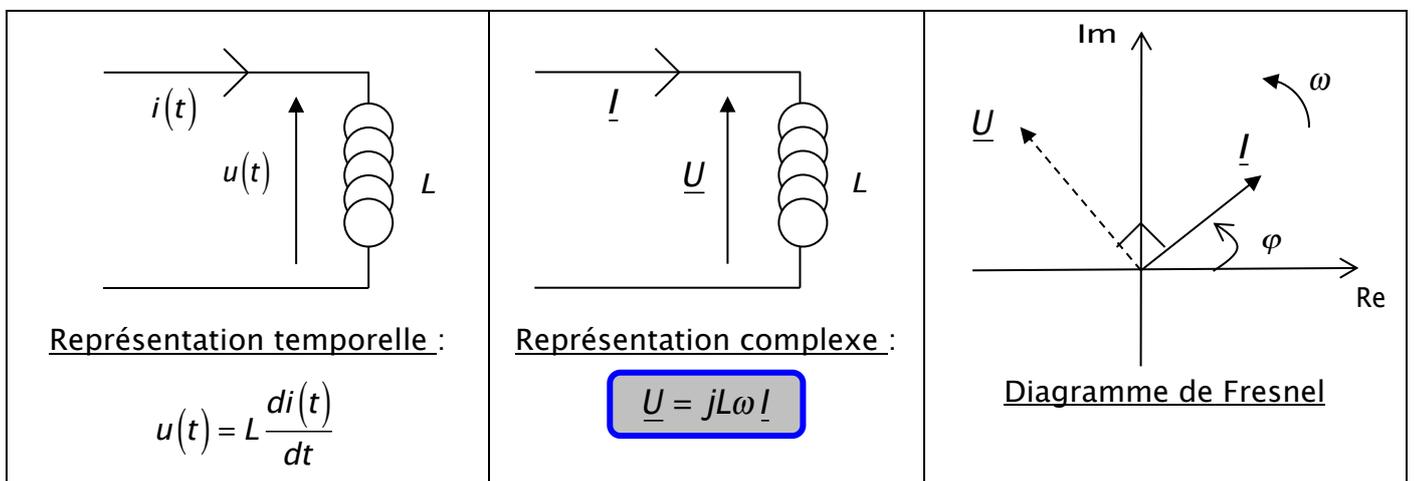


$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{I} = I_m e^{j\varphi}$$

$$u(t) = R I_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{U} = R I_m e^{j\varphi}$$

$u(t)$  et  $i(t)$  sont en phases.

#### 3.2 Bobine

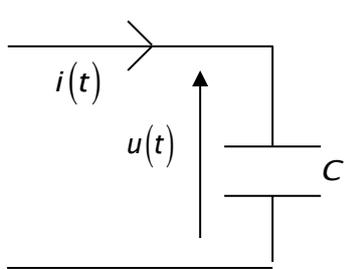
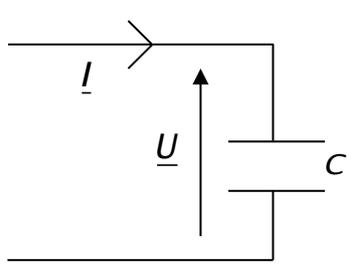
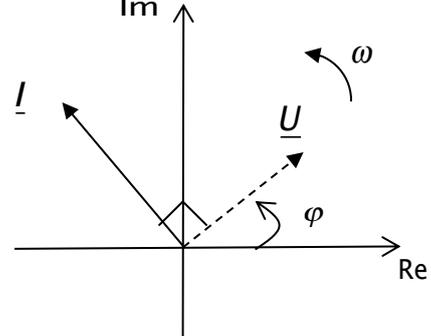


$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{I} = I_m e^{j\varphi}$$

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -L I_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = L I_m \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \underline{U} = \omega L I_m e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = jL\omega \underline{I}$$

$u(t)$  est en avance de  $\pi/2$  sur  $i(t)$ .

### 3.3 Condensateur

 <p>Représentation temporelle :</p> $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	 <p>Représentation complexe :</p> $\underline{U} = \frac{\underline{I}}{jC\omega}$	 <p>Diagramme de Fresnel</p>
--	---	---

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{U} = U_m e^{j\varphi}$$

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = -C U_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = C U_m \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \underline{I} = \omega C U_m e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = jC\omega \underline{U}$$

$u(t)$  est en retard de  $\pi/2$  sur  $i(t)$ .

Nous pouvons résumer les résultats importants obtenus ci-dessus dans le tableau suivant.



Élément	Représentation temporelle	Représentation complexe
$R$	$u = R i$	$\underline{U} = R \underline{I}$
$L$	$u = L \frac{di}{dt}$	$\underline{U} = jL\omega \underline{I}$
$C$	$i = C \frac{du}{dt}$	$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{jC\omega}$

### 3.4 Impédance et admittance complexe

D'après les paragraphes précédents, nous constatons, qu'en représentation complexe,  $\underline{U}$  et  $\underline{I}$  sont proportionnelles. Par généralisation de la loi d'Ohm, on définit pour un dipôle quelconque **l'impédance et l'admittance complexe** (on dira simplement impédance et admittance) :

$$\text{Impédance complexe: } \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \text{ ou } \underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$$

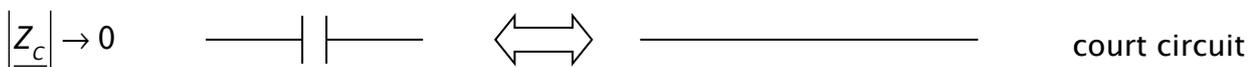
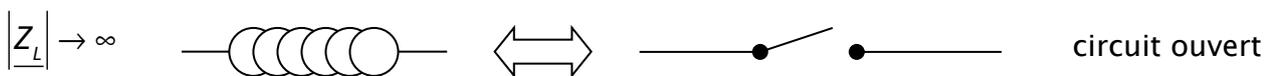
$$\text{Admittance complexe: } \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Pour les trois dipôles fondamentaux, nous avons les impédances et les admittances suivantes :

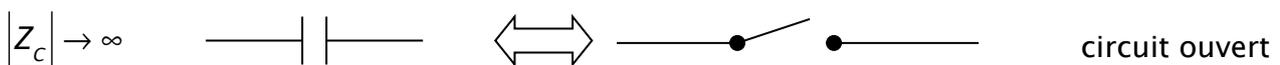
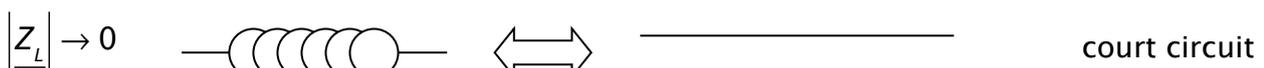
Élément	Impédance	Admittance
$R$	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}$
$L$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}$
$C$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$	$\underline{Y}_C = jC\omega$

On remarque que :

- $\omega \rightarrow \infty$  (haute fréquence)



- $\omega \rightarrow 0$  (basse fréquence)



Pour un dipôle résultant d'une association quelconque de résistances, de bobines et de condensateur, on peut définir une impédance (et admittance) (nombres complexes) que l'on écrira sous la forme :

$$\underline{Z} = R + jX = |\underline{Z}|e^{j\theta}$$

$$R = \text{Re}(\underline{Z}) = \text{résistance}$$

$$X = \text{Im}(\underline{Z}) = \text{réactance}$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ et } \tan\theta = X/R$$

On peut écrire de la même façon l'admittance sous la forme  $\underline{Y} = G + jB$  mais nous l'utiliserons peu.

### **Exercice d'application 1: Impédance et admittance d'un dipôle**

On considère un dipôle constitué d'une bobine en parallèle avec une (résistance + un condensateur).

- a) Evaluer son impédance et son admittance complexes.
- b) Vérifier le comportement du dipôle aux pulsations faibles et élevées.

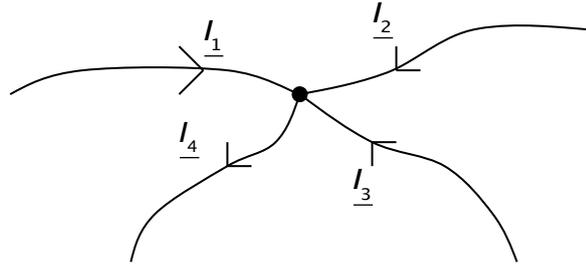
## IV – Théorème généraux en représentation complexe

Les théorèmes généraux que nous avons rencontrés pour des régimes temporels quelconques se généralisent immédiatement en régime sinusoïdal forcé.

### 4.1 Loi des nœuds de Kirchhoff

$$\sum_n \varepsilon_n \underline{I}_n = 0 \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon_n = +1 \text{ si } \underline{I}_n \text{ arrive au nœud} \\ \varepsilon_n = -1 \text{ si } \underline{I}_n \text{ repart du nœud} \end{cases}$$

Dans l'exemple suivant :  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 - \underline{I}_4 = 0$ .



En effet si  $i_1 = I_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) \dots$ ,

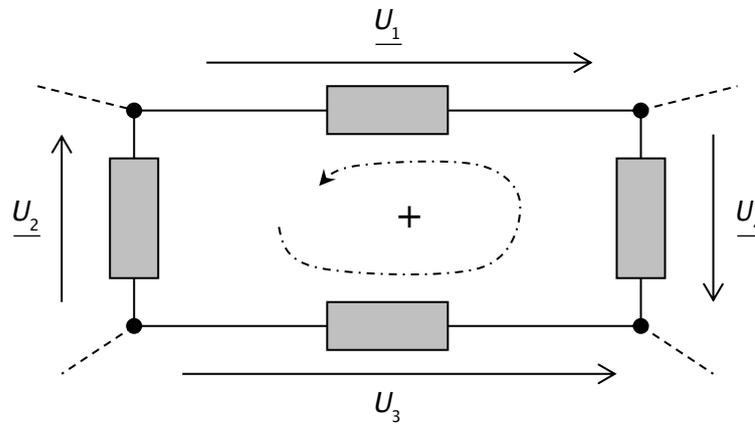
$$I_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) \dots - I_{m4} \cos(\omega t + \varphi_4) = 0 \Leftrightarrow \text{Re} \left( I_{m1} e^{j(\omega t + \varphi_1)} \dots - I_{m4} e^{j(\omega t + \varphi_4)} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Re} \left( \left[ \underline{I}_1 \dots - \underline{I}_4 \right] e^{j\omega t} \right) = 0 \Leftrightarrow \underline{I}_1 \dots - \underline{I}_4 = 0.$$

### 4.2 Loi des mailles de Kirchhoff

$$\sum_n \varepsilon_n \underline{U}_n = 0 \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon_n = +1 \text{ si } \underline{U}_n \text{ orienté dans le sens de la maille} \\ \varepsilon_n = -1 \text{ si } \underline{U}_n \text{ orienté dans le sens contraire de la maille} \end{cases}$$

Dans l'exemple suivant :  $-\underline{U}_1 - \underline{U}_2 - \underline{U}_4 + \underline{U}_3 = 0$ .



La démonstration est analogue à celle sur la loi des nœuds.

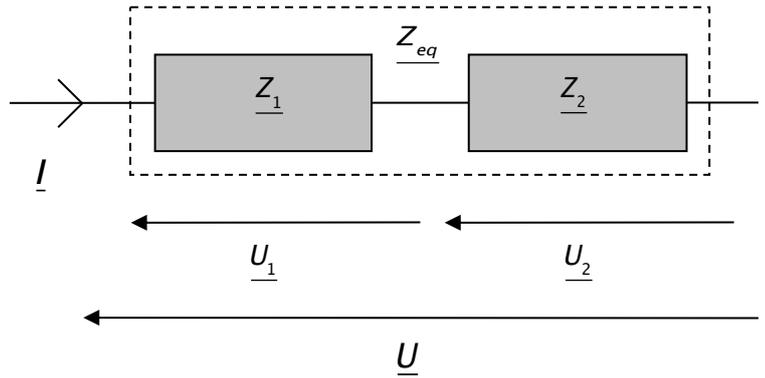
### 4.3 Association d'impédances complexes

#### a) Association en série et pont diviseur de tension

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I} = \underbrace{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}_{\underline{Z}_{eq}} \underline{I} = \underline{Z}_{eq} \underline{I}$$

La généralisation à  $N$  impédances en série est immédiate :

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_N = \sum_{n=1}^N \underline{Z}_n$$



Revenons au cas de deux impédances en série :  $\frac{U_1}{U} = \frac{Z_1 I}{(Z_1 + Z_2) I}$ . On arrive à des expressions très

utiles pour calculer des tensions sans passer par les intensités, on parle de **pont diviseur de tension** :

$$\text{Pont diviseur de tension:}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U} \quad \underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}$$

Dans le cas de  $N$  impédances en série, on obtient de même :  $\underline{U}_n = \frac{\underline{Z}_n}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_N} \underline{U}$ . Cette expression sera peu utilisée.

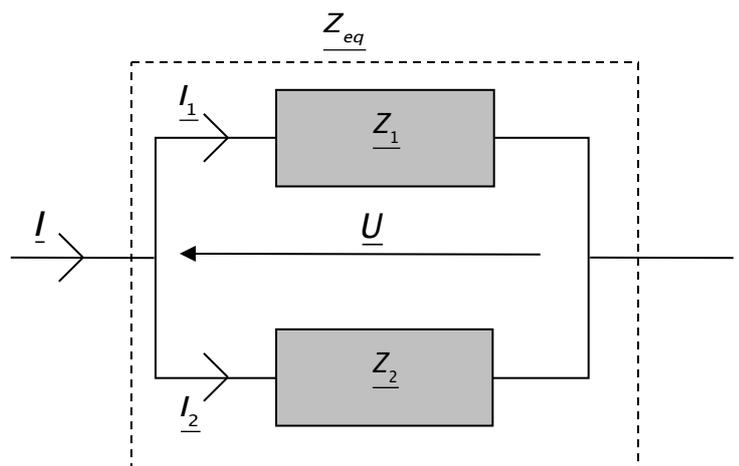
#### b) Association parallèle et pont diviseur de courant

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{Y}_1 \underline{U} + \underline{Y}_2 \underline{U} = \underbrace{(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)}_{\underline{Y}_{eq}} \underline{U} = \underline{Y}_{eq} \underline{U}$$

La généralisation à  $N$  impédances en parallèle est immédiate :

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_N = \sum_{n=1}^N \underline{Y}_n$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_N} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_n}$$



Notons que pour deux impédances en parallèle, on peut écrire :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Il s'agit d'un résultat très pratique.

Revenons au cas de deux impédances en parallèle :  $\frac{I_1}{I} = \frac{Y_1 \underline{U}}{(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \underline{U}}$ . On arrive à des expressions

très utiles pour calculer les courants sans passer par les tensions, on parle de **pont diviseur de courant** :

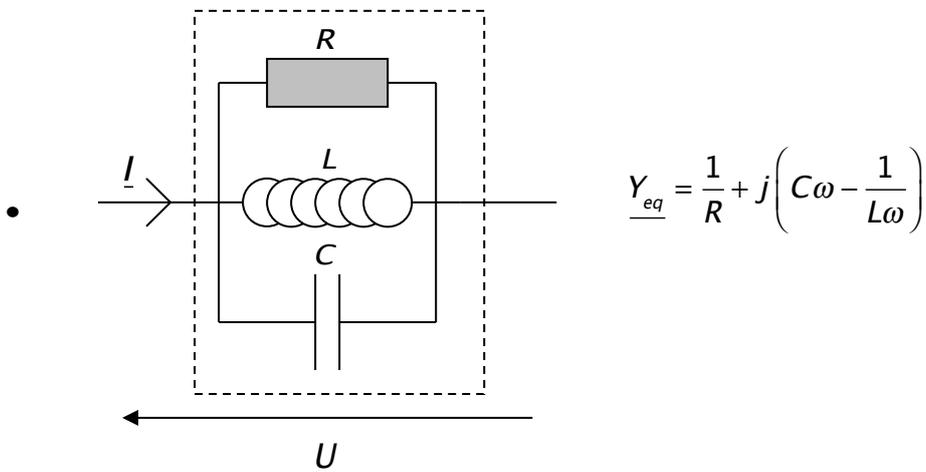
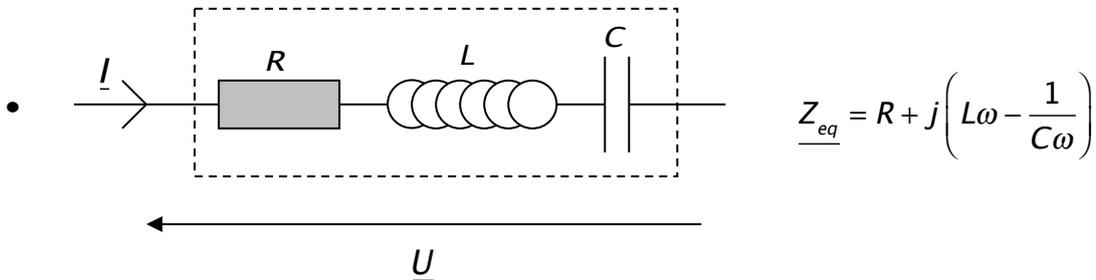
Pont diviseur de courant:

$$I_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} I = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I$$

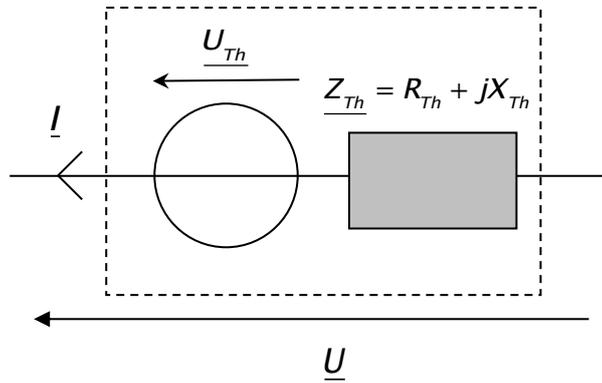
$$I_2 = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} I = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I$$

Dans le cas de  $N$  impédances en parallèle, on obtient de même :  $I_n = \frac{Y_n}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N} I$ . Cette expression sera peu utilisée.

### c) Deux exemples importants



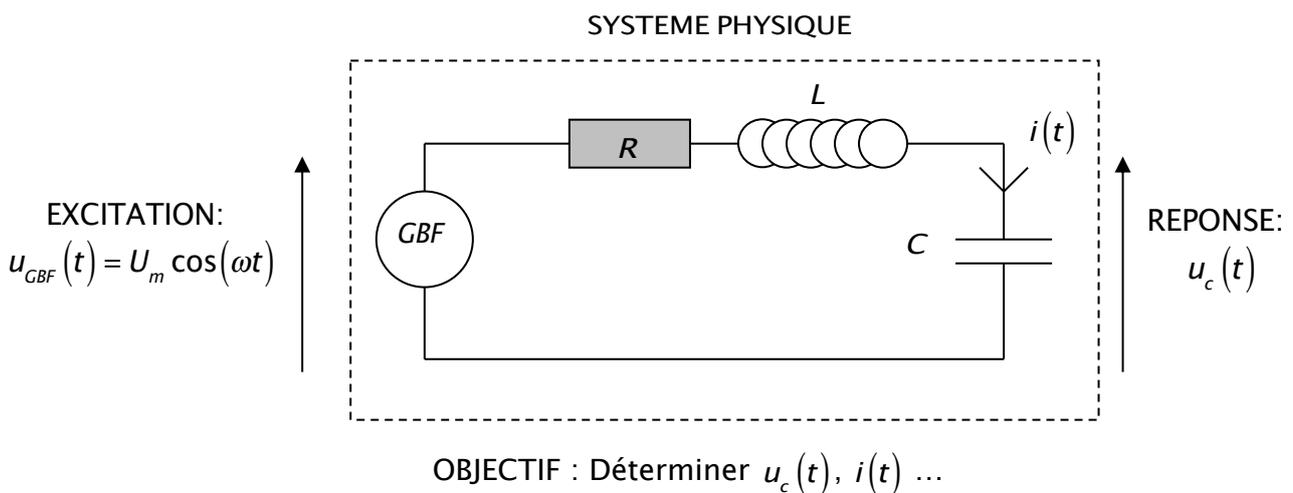
#### 4.4 Générateur de tension : modèle de Thévenin



$$\underline{U} = \underline{U}_{Th} - \underline{Z}_{Th} \underline{I}$$

### V - Réponse d'un circuit RLC série à une excitation sinusoïdale et phénomène de résonance

#### 5.1 Position du problème



#### 5.2 Equation intégral-différentielle qui gouverne l'intensité

La loi des mailles nous donne :

$$u_{GBF}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

On dérive cette équation par rapport au temps :

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{\omega_0/Q} \frac{di(t)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} i(t) = -\frac{\omega}{L} U_m \sin(\omega t)$$

Solution :  $i(t) = i_{RT}(t) + i_{RP}(t)$

⇒  $i_{RT}(t)$  = solution général sans second membre, solution du régime transitoire (libre) :

## DEJA VU:

- $Q > \frac{1}{2}$  régime pseudo-périodique
  - $Q < \frac{1}{2}$  régime apériodique
  - $Q = \frac{1}{2}$  régime critique
- } ce régime va disparaître au bout de quelques  $\tau \equiv \frac{L}{R}$

⇒  $i_{RP}(t)$  = solution particulière avec second membre, solution du régime permanent (forcé)

## NOUVEAU : Quelle solution prendre ?

Le générateur va imposer à toutes les grandeurs du circuit (tension, intensité) d'osciller à la même pulsation que lui donc :

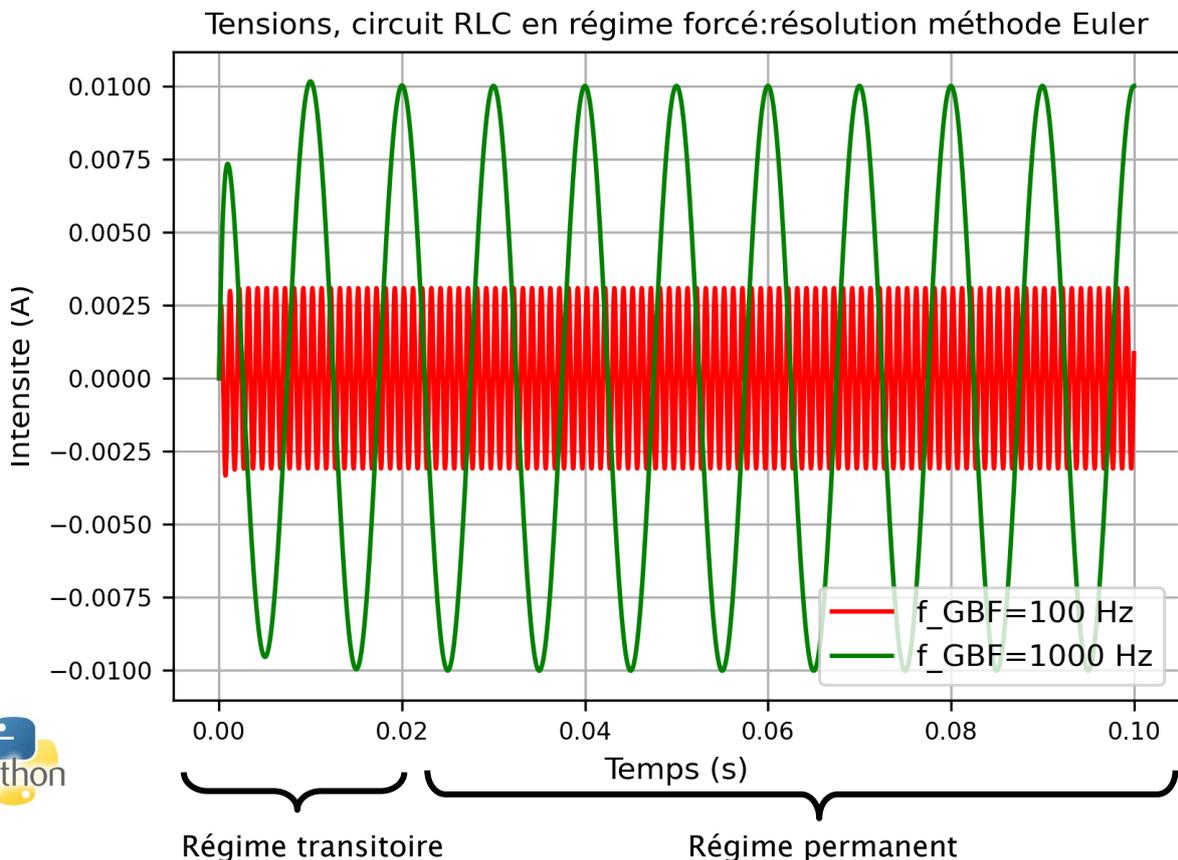


$$i_{RP}(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$\omega$  : connue, imposée par la générateur

$I_m$  et  $\varphi$  : inconnue, à déterminer

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous intéresser uniquement à la détermination de  $i_{RP}(t)$  que nous noterons simplement  $i(t)$ . En effet lorsque  $t > \tau$ ,  $i(t) \approx i_{RP}(t)$ , nous sommes alors en régime permanent dont l'étude est l'objectif principal de ce chapitre



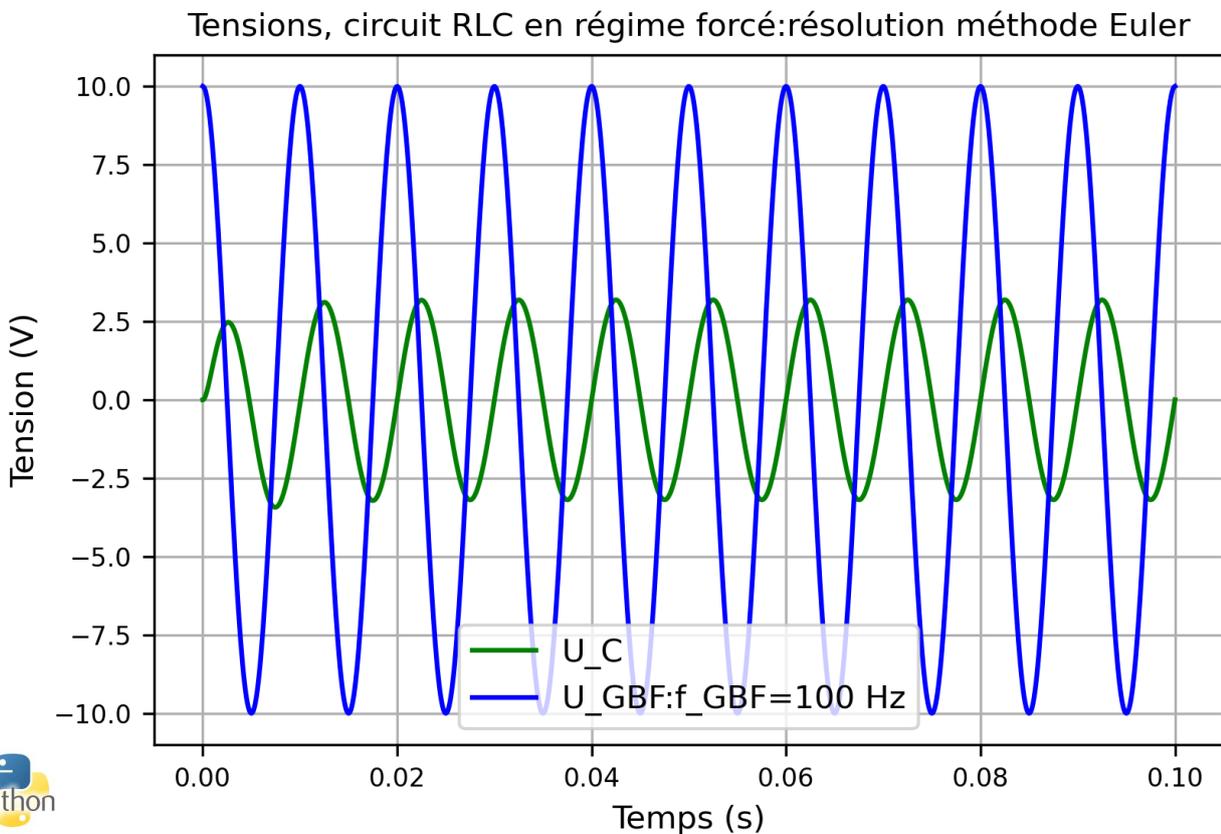
Nous avons résolu le système d'équations différentielles d'ordre 1 suivant qui gouverne  $i(t)$  et  $u_c(t)$  de façon numérique par la méthode d'Euler avec Python (cf. cours d'informatique) :

$$\begin{cases} \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} \\ \frac{di(t)}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q}i(t) - C\omega_0^2u_c(t) + CU_m\omega_0^2\cos(\omega t) \end{cases}$$

L'objectif de ce chapitre est de résoudre analytiquement ce système évidemment ! Pour la résolution numérique, nous avons pris :  $U_m = 10$  V,  $L = 0,5$  H,  $C = 5 \times 10^{-6}$  F,  $R = 1000$   $\Omega$ .

Sur la figure précédente, La **courbe verte** correspond à  $i(t)$  pour une fréquence du générateur  $f = \omega/2\pi = 100$  Hz et la **courbe rouge** correspond à  $i(t)$  pour une fréquence du générateur  $f = 1000$  Hz. On notera que l'amplitude du courant est plus faible à haute fréquence comme nous allons le voir. On notera aussi la brièveté du régime transitoire.

Sur la figure ci-dessous, on constate que la tension aux bornes du condensateur, après le régime transitoire, oscille à la même fréquence que la fréquence imposée par le générateur mais déphasée et avec une amplitude différente. Nous allons voir que ce déphasage et cette amplitude sont des fonctions de la fréquence imposée par le générateur.



Les codes, des différentes courbes réalisées avec Python dans ce chapitre, sont donnés en annexe.

**5.3 Recherche de la solution du régime permanent (forcé) par la représentation complexe, utilisation des amplitudes complexes**

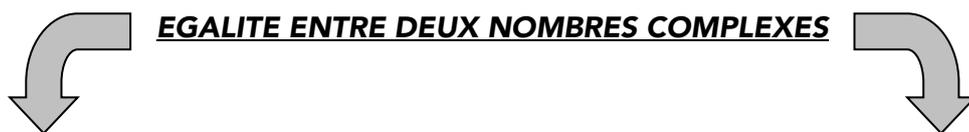
<b>REPRESENTATION TEMPORELLE</b>	<b>REPRESENTATION COMPLEXE</b>
$u_{GBF}(t) = U_m \cos(\omega t)$ $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$  $\frac{d}{dt}$ $\int dt$ $u_{GBF}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{i(0)}^{i(t)} i(t) dt$	$\underline{U} = U_m e^{j0} = U_m$ $\underline{I} = I_m e^{j\varphi}$ $\times j\omega$ $\times \frac{1}{j\omega}$ $\underline{U} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + \frac{1}{jC\omega}\underline{I}$
Equation différentielle, difficile à résoudre Inconnue $i(t)$	Equation algébrique, facile à résoudre Inconnue $\underline{I}$

Nous allons donc résoudre l'équation algébrique :

$$\underline{U} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + \frac{1}{jC\omega}\underline{I} \Leftrightarrow \underline{U} = \underline{Z}_{eq}\underline{I} \text{ avec } \underline{Z}_{eq} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

On retrouve l'expression de l'impédance équivalente du groupement RLC série. Au final :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$



<p><b><u>Egalité des modules :</u></b></p> $I_m(\omega) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$	<p><b><u>Egalité des arguments :</u></b></p> $\tan \varphi(\omega) = -\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R}$
--	---

On a résolu le problème, c'est-à-dire déterminer  $I_m(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  qui sont fonction de la pulsation  $\omega$  imposée par le générateur.

On peut faire apparaître les grandeurs suivantes :

- $\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$  la pulsation propre du circuit.
- $Q \equiv \frac{L\omega_0}{R} \equiv \frac{1}{RC\omega_0}$  le facteur de qualité du circuit (sans unité).
- $x \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$  la pulsation réduite (sans unité).

Avec les notations suivantes, on peut réécrire :

$$I_m(x) = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \text{ et } \tan \varphi(x) = -Q \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

### **Exercice d'application 2: Approche par impédance**

Soit le circuit RLC série précédent soumis à une tension sinusoïdale  $U_m \cos(\omega t)$ . Retrouver en utilisant les impédances complexes l'expression de l'amplitude complexe de l'intensité.

## 5.4 Résonance en intensité

- On constate que pour  $x = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ),  $I_m$  atteint sa valeur maximale, quelque soit la valeur de  $Q$ , on parle de **RESONANCE EN INTENSITE**.

$$\left. \begin{aligned} I_m(\omega = \omega_0) &\equiv I_m^{\max} = \frac{U_m}{R} \\ \varphi(\omega = \omega_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{quelque soit la valeur de } Q$$

- On appelle **BANDE PASSANTE** l'intervalle  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  (ou  $\Delta x = x_2 - x_1$ ) tel que, par définition,  $\frac{I_m^{\max}}{\sqrt{2}} \leq I_m \leq I_m^{\max}$  (le facteur  $\sqrt{2}$  a un lien avec l'énergie, cf cours sur la puissance en régime sinusoïdal).

$$I_m(\omega = \omega_{1,2}) \equiv \frac{I_m^{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{R\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \text{ ou } I_m(x = x_{1,2}) \equiv \frac{I_m^{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{R\sqrt{2}} = \frac{U_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

- $\Leftrightarrow 2 = 1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow 1 = Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$  soit  $\boxed{x^2 \mp \frac{x}{Q} - 1 = 0}$ . On a donc 4 solutions dont 2 positives qu'il faut garder.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \\ x_2 &= \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \end{aligned} \right\} x_1 \text{ et } x_2 \text{ dépendant de } Q$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

On constate que plus le facteur de qualité est grand (faible amortissement) plus la résonance est étroite.

## 5.5 Représentation graphique de l'amplitude et de la phase

Graphes de  $I_m(x)$  et graphes de  $\varphi(x)$

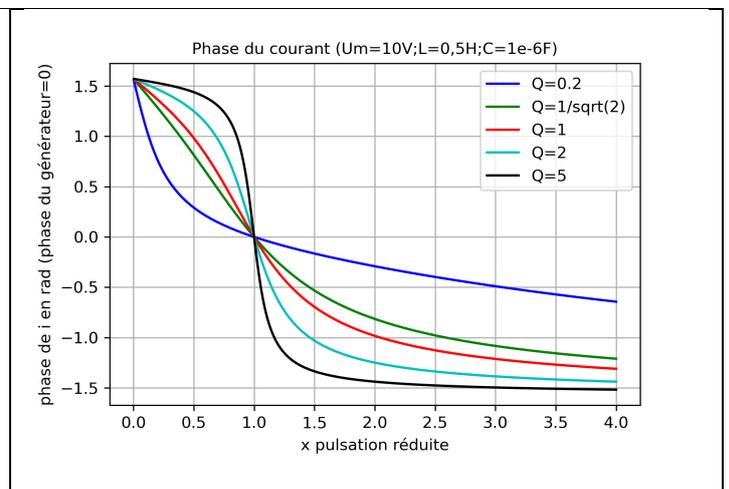
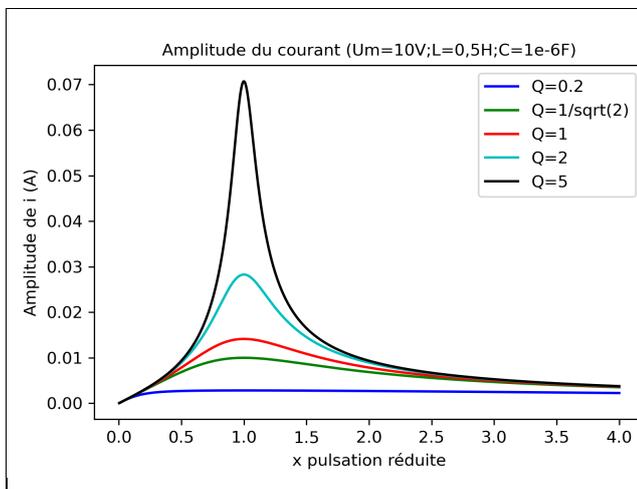
Graphes de  $I_m(x)$

- Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$ ,  $I_m \rightarrow 0$ .
- Quand  $x \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $I_m \rightarrow 0$ .
- Quand  $x \rightarrow 1$ ,  $\omega \rightarrow \omega_0$ ,  $I_m = \frac{U_m}{R}$ .

Graphes de  $\varphi(x)$

- Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\varphi \rightarrow \pi/2$ .
- Quand  $x \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow -\pi/2$ .
- Quand  $x \rightarrow 1$ ,  $\omega \rightarrow \omega_0$ ,  $\varphi = 0$ .
- Quand  $x = x_{1,2}$ ,  $\varphi = -\arctan(\pm 1) = \pm \pi/4$ .

Pour chaque valeur de  $\omega \rightarrow \omega_0$ , il y a une valeur de  $x_1$  et  $x_2$  différente.



**Le phénomène de résonance** est très général en physique (mécanique, optique, physique des particules). Il y a résonance quand on excite un système avec une fréquence identique à sa fréquence propre

### Exercice d'application 3: Limites basse et haute fréquence de l'intensité

Expliquer sans aucun calcul pourquoi l'intensité devient nulle à basse et haute fréquence dans un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé.

## 5.6 Résonance en tension

### a) Recherche de la pulsation de résonance

Nous cherchons à présent à déterminer  $u_c(t)$  aux bornes du condensateur sous la forme  $u_c(t) = U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_c)$ . Il faut donc trouver  $U_{cm}$  et  $\varphi_c$  qui dépendent de la pulsation  $\omega$  du générateur. Nous passons en représentation complexe :

$$u_c(t) = U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_c) \leftrightarrow \underline{U}_c = U_{cm} e^{j\varphi_c}$$

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \leftrightarrow \underline{I} = jC\omega \underline{U}_c$$

$$\underline{U}_c = \frac{\underline{U}}{1 - LC\omega^2 + j\omega RC}$$



#### Egalité des modules :

$$U_{cm}(\omega) = \frac{U_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

#### Egalité des arguments :

$$\tan \varphi_c(\omega) = -\frac{x}{Q(1-x^2)}$$

Il y a **RESONANCE EN TENSION** aux bornes du condensateur quand  $U_{cm}$  est maximale. On cherche la pulsation réduite  $x_r$  pour laquelle  $U_{cm}(x = x_r) = U_{cm}^{\max}$ .  $U_{cm}$  est maximale quand

$(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$  est minimale :

$$\left( \frac{d \left( (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right)}{dx} \right)_{x=x_r} = 0 \Leftrightarrow 2(1-x_r^2)(-2)x_r + \frac{2}{Q^2}x_r = 0 \Leftrightarrow x_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0. \quad x_r \text{ n'existe que}$$

si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

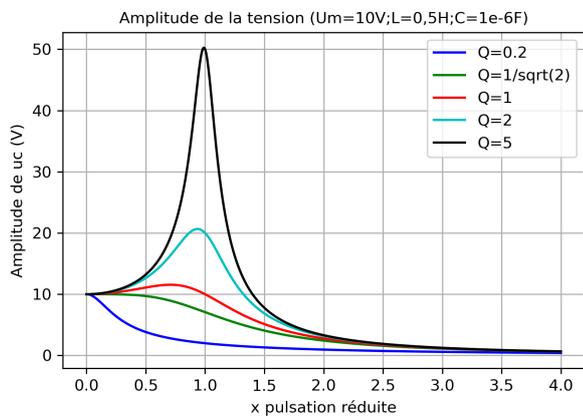
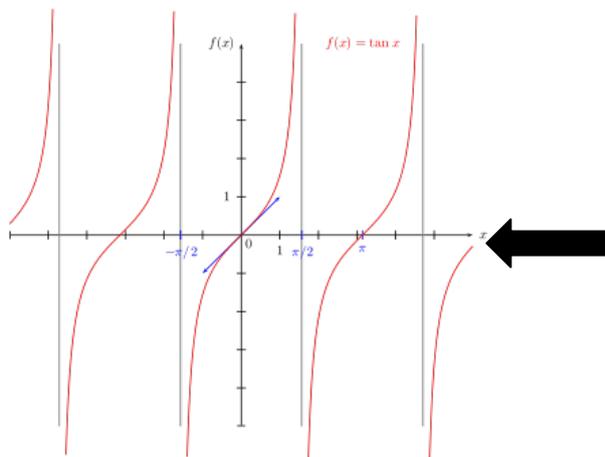
Si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il y a résonance en tension et  $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$  ou  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ .

Si  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il n'y a pas de résonance en tension.

Contrairement à la résonance en intensité, la résonance en tension n'existe que si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . De plus la pulsation de résonance  $\omega_r$  dépend du facteur de qualité  $Q$ .

### Graphes de $U_{cm}(x)$

- Quand  $x \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0, U_{cm} \rightarrow U_m$ .
- Quand  $x \rightarrow \infty, \omega \rightarrow \infty, U_{cm} \rightarrow 0$ .
- Quand  $Q$  augmente et  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$   $x_r \rightarrow 1$ .



### Graphes de $\varphi_c(x)$



Il y a une subtilité ici car la fonction tan est défini à  $\pi$  près.

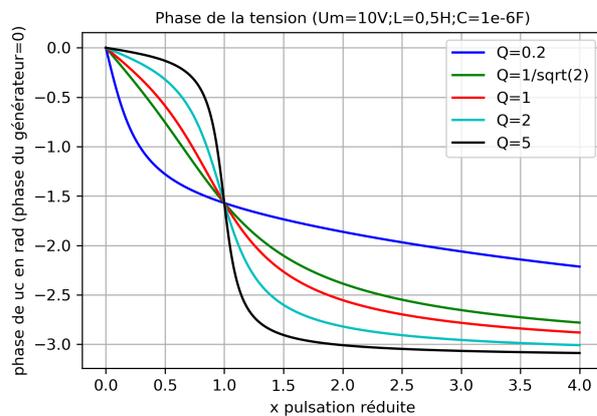
- Quand  $x \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0, \varphi_c \rightarrow 0$ .  $0 \leq x \leq 1$  ainsi  $\tan \varphi_c \leq 0$  donc  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_c \leq 0$ .

- Quand  $x \rightarrow \infty, \omega \rightarrow \infty, \varphi_c \rightarrow -\pi$  !

$x \geq 1$  ainsi  $\tan \varphi_c \geq 0$ . On choisi le domaine

$-\pi \leq \varphi_c \leq -\frac{\pi}{2}$  car  $\varphi_c$  doit être continue

(cf. figure ci-dessous).



# ANNEXE 1 : Bilan-analyse d'un circuit en régime sinusoïdale forcé (AC)

Fonctions temporelles et la représentation complexe associée (les anglais disent Phasor domain) avec:

$$x(t) = \Re_e [ X e^{j\omega t} ]$$

$x(t)$		$X$
$A \cos \omega t$	$\longleftrightarrow$	$A$
$A \cos(\omega t + \phi)$	$\longleftrightarrow$	$A e^{j\phi}$
$-A \cos(\omega t + \phi)$	$\longleftrightarrow$	$A e^{j(\phi \pm \pi)}$
$A \sin \omega t$	$\longleftrightarrow$	$A e^{-j\pi/2} = -jA$
$A \sin(\omega t + \phi)$	$\longleftrightarrow$	$A e^{j(\phi - \pi/2)}$
$-A \sin(\omega t + \phi)$	$\longleftrightarrow$	$A e^{j(\phi + \pi/2)}$
$\frac{d}{dt}(x(t))$	$\longleftrightarrow$	$j\omega X$
$\frac{d}{dt}[A \cos(\omega t + \phi)]$	$\longleftrightarrow$	$j\omega A e^{j\phi}$
$\int x(t) dt$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{j\omega} X$
$\int A \cos(\omega t + \phi) dt$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{j\omega} A e^{j\phi}$

Ces tableaux sont extrait de : Circuits par Fawwaz T. Ulaby et Michel M. Maharbiz aux éditions NTS Press, 2009, 608 p.

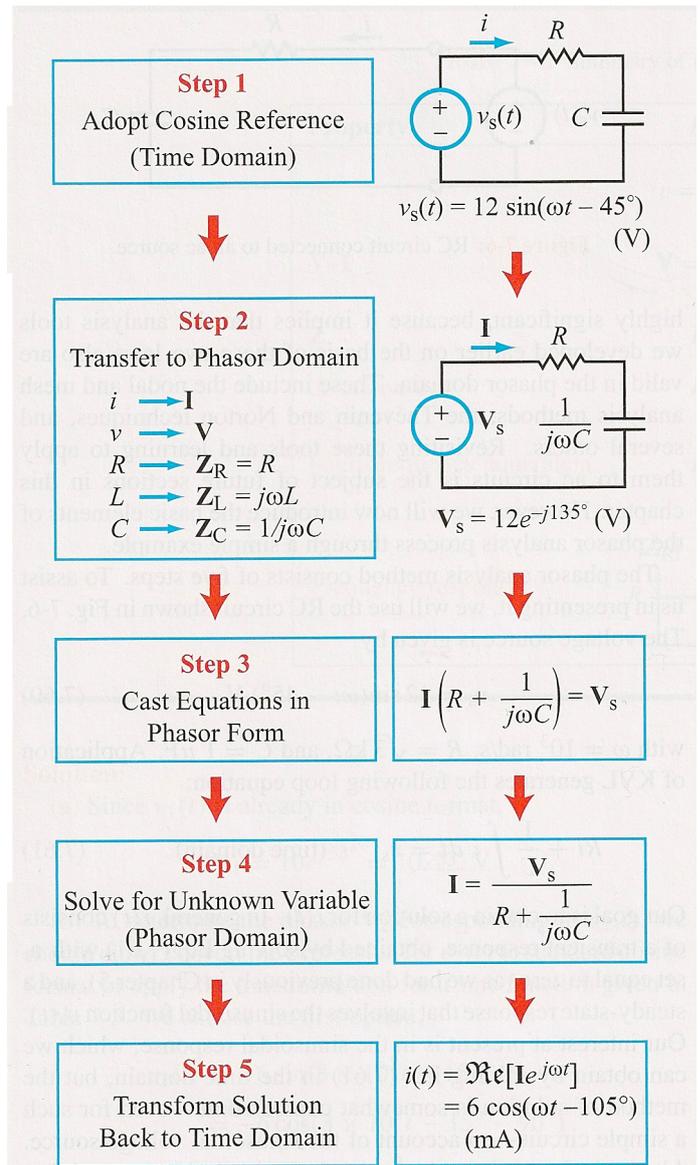


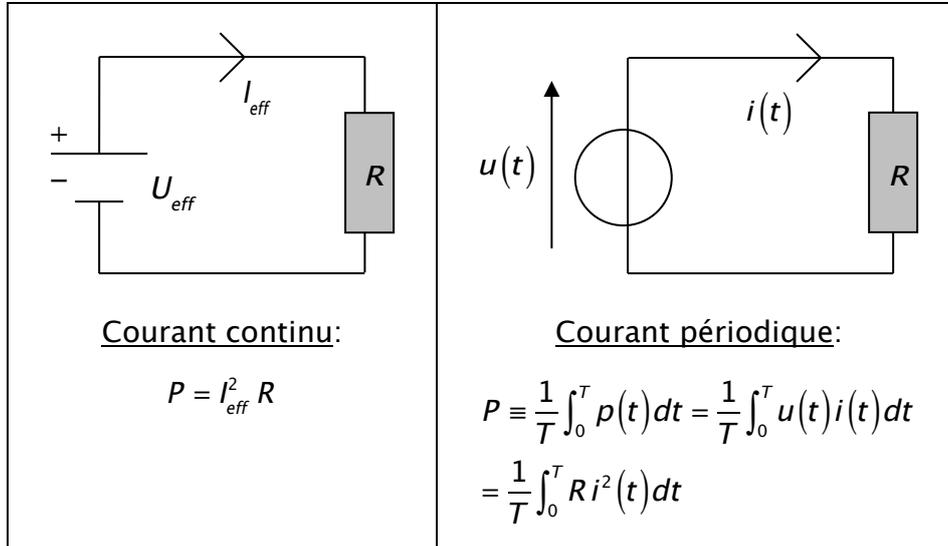
Figure 7-7: Five-step procedure for analyzing ac circuits using the phasor-domain technique.

Table 7-4: Summary of  $v$ - $i$  properties for  $R$ ,  $L$ , and  $C$ .

Property	$R$	$L$	$C$
$v$ - $i$	$v = Ri$	$v = L \frac{di}{dt}$	$i = C \frac{dv}{dt}$
$V$ - $I$	$V = RI$	$V = j\omega LI$	$V = \frac{I}{j\omega C}$
$Z$	$R$	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega C}$
dc equivalent	$R$	Short circuit	Open circuit
High-frequency equivalent	$R$	Open circuit	Short circuit
Frequency response	$ Z_R $ 	$ Z_L $ 	$ Z_C $ 

## ANNEXE 2 : Valeur efficace d'un signal électrique, sens physique

Par définition, la **valeur efficace d'un courant périodique**, notée  $I_{eff}$  (ou  $I_{RMS}$  en anglais), est le courant continu qui produirait la **même puissance moyenne** à travers une résistance qu'en régime périodique quelconque.



Pour que les deux puissances soient identiques, il faut que :

$$I_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

On aboutit à la définition mathématique de l'intensité efficace pour une intensité périodique. On peut, par analogie, définir la tension efficace d'une tension périodique par :

$$U_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

D'un point de vue mathématique, on peut définir la valeur efficace (RMS) d'un signal périodique  $x(t)$  de période  $T$  par  $x_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$ .

## Code Python pour la résolution numérique des équations différentielles par la méthode d'Euler

```

from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def UG(f,t):
    tension=10*np.cos(2*pi*f*t)
    return tension

def euler(f,T,n):
    Um=10
    omega=2*pi*f
    L=0.5
    C=5e-6
    R=1000
    omega0=1/sqrt(L*C)
    Q=L*omega0/R
    dt=T/float(n-1)
    t=np.linspace(0,T,n)
    uc=np.zeros(n)
    i=np.zeros(n)
    uc[0]=0
    i[0]=0
    for k in range (n-1):
        uc[k+1]=uc[k]+dt*i[k]/C
        i[k+1]=i[k]+dt*(-(omega0/Q)*i[k]-C*(omega0**2)*uc[k]+\
            C*(omega0**2)*Um*cos(omega*t[k]))
    return uc, i, t

f1=100
f2=1000
t_generateur = np.linspace(0, 10/f1, 1000)
u_generateur = UG(f1, t_generateur)

uc1,i1,t1 = euler(f1,10/f1,10000)
uc2,i2,t2 = euler(f2,10/f1,10000)
plt.plot(t1,uc1,'g-', markersize=3)
plt.plot(t_generateur,u_generateur,'b-', markersize=3)
#plt.plot(t2,i2,'r-', markersize=3)
#plt.plot(t1,i1,'g-', markersize=3)
plt.grid()
plt.title('Tensions, circuit RLC en régime forcé:\
résolution méthode Euler',size=10)
plt.ylabel('Tension (V)',size=10)
plt.xlabel('Temps (s)',size=10)
plt.legend(['U_C','U_générateur:f=100 Hz'],\
    loc='lower right',fontsize=10)
plt.xticks(size=8)
plt.yticks(size=8)
plt.show()

```

## Code Python pour tracer les courbes des amplitudes et des phases pour l'intensité

```

from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Amplitude complexe de l'intensité
def I(x,Q):
    L=0.5
    C=1e-6
    w0=1/np.sqrt(L*C)
    Um=10
    R=L*w0/Q
    return (Um/R)*1/(1+1j*Q*(x-1/x))

#Calcul de l'amplitude et de la phase
def Ampli_Phase(I,Q):
    n=1000
    x=np.linspace(0,4,n)
    z=np.zeros(n,dtype=complex)
    Im=np.zeros(n)
    phi=np.zeros(n)
    for i in range (n) :
        z[i]=I(x[i],Q)
        Im[i]=np.abs(z[i])
        phi[i]=np.angle(z[i])
    return x,Im,phi

#Choix des différents facteurs de qualité
Q1=0.2
Q2=1/sqrt(2)
Q3=1
Q4=2
Q5=5
x1,Im1,phi1=Ampli_Phase(I,Q1)
x2,Im2,phi2=Ampli_Phase(I,Q2)
x3,Im3,phi3=Ampli_Phase(I,Q3)
x4,Im4,phi4=Ampli_Phase(I,Q4)
x5,Im5,phi5=Ampli_Phase(I,Q5)

plt.figure(1)
plt.xlabel('x pulsation réduite', size=10)
plt.ylabel('Amplitude de i (A)', size=10)
plt.title('Amplitude du courant (Um=10V;L=0,5H;C=1e-6F)',size=10)
plt.plot(x1,Im1,"-b")
plt.plot(x2,Im2,"-g")
plt.plot(x3,Im3,"-r")
plt.plot(x4,Im4,"-c")
plt.plot(x5,Im5,"-k")
plt.legend(['Q=0.2','Q=1/sqrt(2)','Q=1','Q=2','Q=5'],fontsize=10)
plt.grid(which="both")

plt.figure(2)
plt.xlabel('x pulsation réduite', size=10)
plt.ylabel('phase de i en rad (phase du générateur=0)', size=10)
plt.title('Phase du courant en fonction (Um=10V;L=0,5H;C=1e-6F)',size=10)
plt.plot(x1,phi1,"-b")
plt.plot(x2,phi2,"-g")
plt.plot(x3,phi3,"-r")
plt.plot(x4,phi4,"-c")
plt.plot(x5,phi5,"-k")
plt.legend(['Q=0.2','Q=1/sqrt(2)','Q=1','Q=2','Q=5'],fontsize=10)
plt.grid(which="both")
plt.show()

```

## Code Python pour tracer les courbes des amplitudes et des phases pour la tension aux bornes de C

```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Amplitude complexe de la tension aux bornes de C
def U(x,Q):
    L=0.5
    C=1e-6
    w0=1/np.sqrt(L*C)
    Um=10
    R=L*w0/Q
    return (Um)*1/(1-x**2+1j*(1/Q)*x)

#Calcul de l'amplitude et de la phase
def Ampli_Phase(U,Q):
    n=1000
    x=np.linspace(0,4,n)
    z=np.zeros(n,dtype=complex)
    Um=np.zeros(n)
    phi=np.zeros(n)
    for i in range(n):
        z[i]=U(x[i],Q)
        Um[i]=np.abs(z[i])
        phi[i]=np.angle(z[i])
    return x,Um,phi
```

```
#Choix des différents facteurs de qualité
Q1=0.2
Q2=1/sqrt(2)
Q3=1
Q4=2
Q5=5
x1,U1,phi1=Ampli_Phase(U,Q1)
x2,U2,phi2=Ampli_Phase(U,Q2)
x3,U3,phi3=Ampli_Phase(U,Q3)
x4,U4,phi4=Ampli_Phase(U,Q4)
x5,U5,phi5=Ampli_Phase(U,Q5)

plt.figure(1)
plt.xlabel('x pulsation réduite', size=10)
plt.ylabel('Amplitude de uc (V)', size=10)
plt.title('Amplitude de la tension (Um=10V;L=0,5H;C=1e-6F)',size=10)
plt.plot(x1,U1,"-b")
plt.plot(x2,U2,"-g")
plt.plot(x3,U3,"-r")
plt.plot(x4,U4,"-c")
plt.plot(x5,U5,"-k")
plt.legend(['Q=0.2','Q=1/sqrt(2)','Q=1','Q=2','Q=5'],fontsize=10)
plt.grid(which="both")

plt.figure(2)
plt.xlabel('x pulsation réduite', size=10)
plt.ylabel('phase de uc en rad (phase du générateur=0)', size=10)
plt.title('Phase de la tension en fonction (Um=10V;L=0,5H;C=1e-6F)',size=10)
plt.plot(x1,phi1,"-b")
plt.plot(x2,phi2,"-g")
plt.plot(x3,phi3,"-r")
plt.plot(x4,phi4,"-c")
plt.plot(x5,phi5,"-k")
plt.legend(['Q=0.2','Q=1/sqrt(2)','Q=1','Q=2','Q=5'],fontsize=10)
plt.grid(which="both")
plt.show()
```