MESURES, VARIABILITE ET INCERTITUDES

«La connaissance progresse en intégrant en elle l'incertitude, non en l'exorcisant.»
Edgar Morin (1931-)

Le but de la majorité des expériences en sciences consiste à comprendre un phénomène et à le modéliser correctement. Nous effectuons des mesures (terme qui reste à définir précisément) et nous avons souvent à nous poser la question: “ quelle est la valeur de telle ou telle grandeur ? ”, parfois sans nous demander préalablement si cette formulation est correcte et si nous serons capables de trouver une réponse.
La nécessité de cette interrogation préalable devient évidente dès qu’on mesure la même grandeur plusieurs fois. L’expérimentateur qui le fait est fréquemment confronté à une situation assez intéressante : s’il utilise des appareils suffisamment précis, il s’aperçoit que des mesures répétées de la même grandeur donnent parfois des résultats qui sont un peu différents de celui de la première mesure. Ce phénomène est général, que les mesures soient simples ou sophistiquées. Même les mesures répétées de la longueur d’une tige métallique peuvent donner des valeurs différentes. La répétition de l’expérience montre que, d’une part, les résultats sont toujours un peu différents et, d’autre part, cette différence n’est en général pas très grande. Dans la plupart des cas, on reste proche d’une certaine valeur moyenne, mais de temps en temps on trouve des valeurs qui sont différentes de celle-ci. Plus les résultats sont éloignés de cette moyenne, plus ils sont rares.

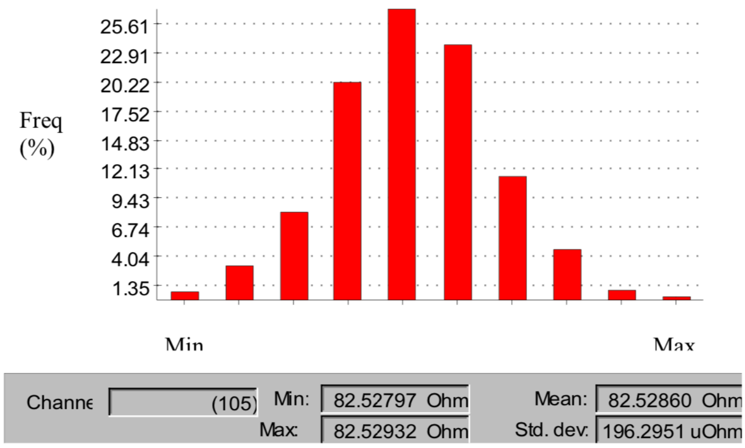
I – MESURE ET VARIABILITE D’UNE GRANDEUR PHYSIQUE

1) Qu’est-ce qu’une mesure et sa variabilité ?

✔ En sciences, on appelle ***mesure*** une procédure expérimentale qui conduit à attribuer un ensemble de valeurs numériques à une grandeur, accompagnée d’une unité appropriée.
✔ Le ***résultat d’une mesure*** décrit cet ensemble de valeurs en le complétant par des explications sur la manière dont elles ont été obtenues.

La mesure est intrinsèquement variable: bien qu’on ne s’en aperçoive pas toujours, si on répète une mesure, on trouve souvent une valeur numérique différente. Par souci de clarté, on peut utiliser le terme ***« observation »*** pour désigner une seule mesure réalisée, afin de le distinguer de la ***« mesure »*** définie plus haut (une mesure est un ensemble d’observations).

Par exemple, l’histogramme ci-dessous montre le résultat ***de la mesure*** d’une résistance. Le conducteur ohmique dont on souhaite mesurer la résistance est branché aux bornes d’un ohmmètre. Celui-ci communique avec un ordinateur pour automatiser la mesure. Un programme procède à $N = 2000$ ***observations*** de la résistance R : $\left\{R_1;R_2\ldots R_N\right\}$. Il repère la valeur minimale R_{min}, la valeur maximale R_{max}, divise l’intervalle $\left[R_{\text{min}};R_{\text{max}}\right]$ en 10 intervalles de même taille, calcule le nombre n de résultats dans chaque intervalle et affiche les résultats sous la forme ***d’un histogramme*** où l’on représente la fréquence des résultats en %, c’est-à-dire la proportion de résultats dans chaque intervalle.



On constate sur cet exemple la variabilité de la mesure.

2) Comment caractériser la variabilité d'une mesure ?

Soit x le résultat de la mesure d'une grandeur physique. Quelle est la valeur de x ?

Il n'existe pas ***une*** valeur de x qui serait une valeur exacte car cette grandeur physique possède de façon intrinsèque une variabilité plus ou moins importante.

Pour décrire un ensemble de N observations de manière plus simple qu'un histogramme, on peut introduire deux paramètres :

✔ La ***moyenne arithmétique*** des N observations : $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

✔ ***L'écart type***, notée σ_x, qui caractérise la dispersion des valeurs raisonnablement attribuables à la grandeur mesurée. La valeur mesurée est une de ces valeurs. L'écart type quantifie donc la variabilité potentielle de la mesure. En cela elle reflète son incertitude.

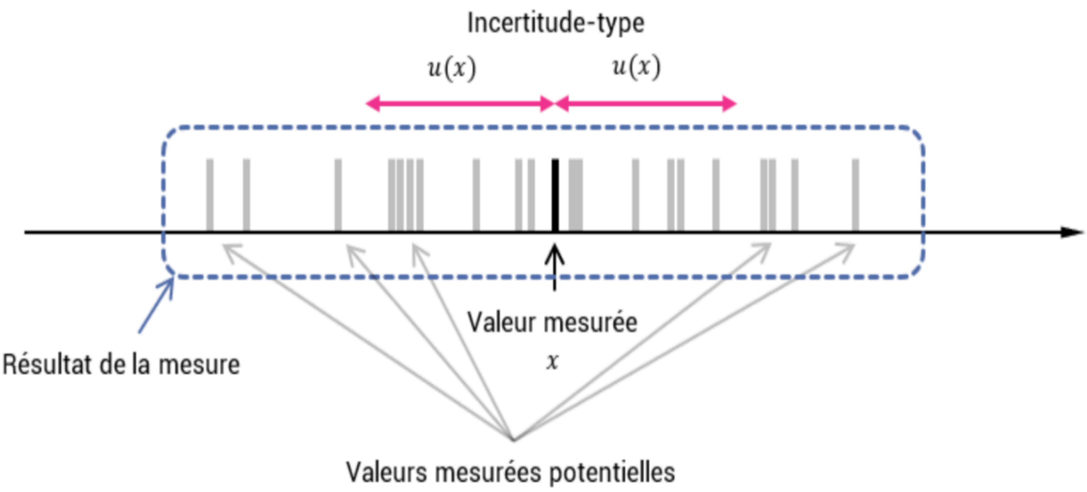
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

Remarque : En écrivant cela, on suppose implicitement que les observations de notre mesure (comme sur l'exemple avec les résistances) se répartissent suivant une distribution normale (une gaussienne ou encore courbe en cloche) qui est entièrement caractérisée par deux paramètres : sa valeur moyenne et son écart type.

II – ESTIMATION DU RESULTAT D'UNE MESURE ET DE L'INCERTITUDE TYPE

1) Expérience sans variabilité observée, incertitude de type B

On se place ici dans le cas où on n'a ***pu réaliser qu'une observation unique***, ou bien dans le cas où ***la répétition des observations conduit exactement à la même valeur***. C'est par exemple le cas lorsque l'on mesure naïvement la taille d'un objet avec la même règle graduée.
La difficulté dans ce cas est de retrouver la variabilité intrinsèque à la mesure, qui est masquée par l'appareil employé.

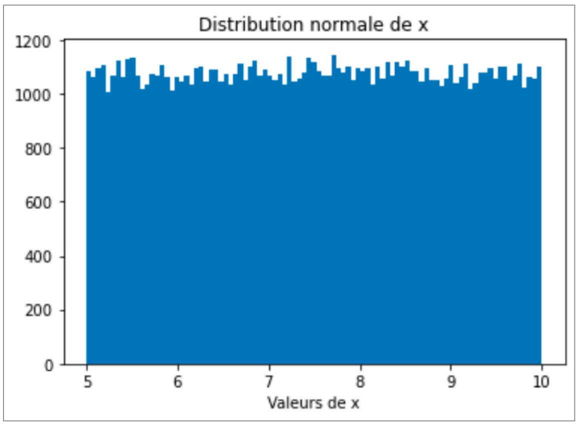


On appellera ***incertitude-type***, noté $u(x)$, la grandeur qui caractérisera cette variabilité. Elle est évaluée par un jugement scientifique qui repose sur l'expérience et les connaissances générales de l'expérimentateur ou de l'expérimentatrice : c'est une compétence qui s'apprend par la pratique. Dans ce jugement il demeure une part d'arbitraire, qui doit être assumée et documentée.

Lors d'une mesure ***sans variabilité observée***, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note $\overline{x}$ ***la valeur centrale*** de cette plage et Δ ***sa demi-largeur***. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $\left[\overline{x}-\Delta;\overline{x}+\Delta\right]$. Le résultat de la mesure s'écrira de la façon suivante :

$$\overline{x} \pm u(x) \text{ (unité) avec } u(x)=\frac{\Delta}{\sqrt{3}}.$$

Ces résultats sont basés (mathématiquement) sur l'hypothèse que les observations se répartissent selon une distribution uniforme dans l'intervalle $\left[\overline{x}-\Delta;\overline{x}+\Delta\right]$.



L'histogramme ci-dessus résulte de la simulation avec Python d'une distribution uniforme de 10**5 valeurs de x entre 5 et 10 (cf. paraphe paragraphe III pour l'utilisation de Python).

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 10**5

A=np.random.uniform(5,10,size=N)

plt.hist(A,bins='rice')
plt.xlabel('Valeurs de x')
plt.title('Distribution normale de x')

plt.show()
```

2) Expérience avec variabilité observée, incertitude de type A

On se place dans le cas où on a effectué plusieurs observations, et qu'elles ne sont pas toutes identiques. Une ***évaluation de nature statistique*** peut alors être envisagée.

Si l'on choisit de prendre comme meilleure estimation de la valeur de la grandeur x la moyenne des N observations : $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$, alors on peut se demander comment évaluer l'incertitude-type associée à cette moyenne unique. Cela n'a rien d'évident. On peut procéder de la façon suivante :

On recommence un grand nombre de fois, par exemple M fois, la mesure de N observations $\{x_1;x_2\ldots x_N\}$. On obtient un grand nombre de mesures :

$$\left[\underbrace{\{x_1;x_2\ldots x_N\}_1}_{\text{valeur moyenne } \overline{x_1}};\underbrace{\{x_1;x_2\ldots x_N\}_2}_{\overline{x_2}}\ldots\underbrace{\{x_1;x_2\ldots x_N\}_{\mathrm{M}}}_{\overline{x_{\mathrm{M}}}}\right]$$

On obtient un ensemble de M valeurs moyennes $\left\{\overline{x_1};\overline{x_2}\ldots\overline{x_{\mathrm{M}}}\right\}$ dont la valeur moyenne (la moyenne des moyennes) sera notée $\overline{\mathrm{X}}$. L'incertitude-type de la mesure sera l'écart-type sur la distribution de ces M valeurs moyennes : $\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{M}-1}\sum_{i=1}^{\mathrm{M}}\left(\overline{x_i}-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}$.

On comprend bien que cette ***opération peut vite être chronophage et coûteuse***. Heureusement, il existe une relation mathématique permettant d'estimer cet écart-type. En effet on peut montrer que $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$.

On réalise N observations $\{x_1;x_2\ldots x_N\}$ pour la mesure de la grandeur x. Le résultat de la mesure s'écrira de la façon suivante :

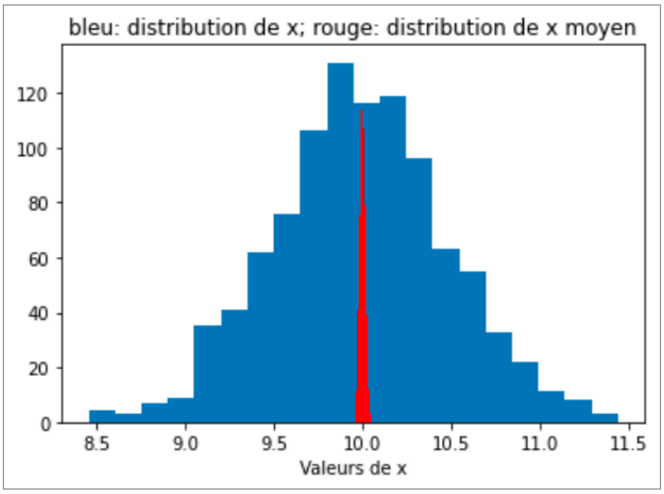
$$\overline{x} \pm u(x) \text{ (unité) avec } \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \text{ et } u(x) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}.$$

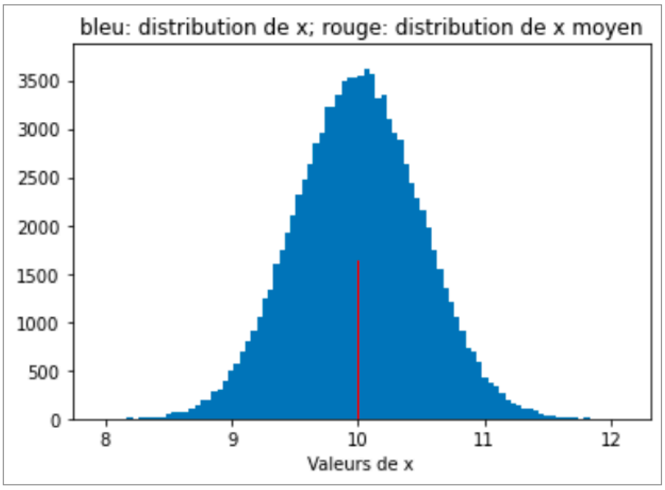
Il n'est donc pas nécessaire de déterminer $\sigma_{\overline{x}}$ mais simplement σ_x et de diviser par $\sqrt{N}$. Ouf !!

Cette incertitude-type varie en $1/\sqrt{N}$ ce qui traduit que plus le nombre d'observations est élevé et plus l'incertitude sera réduite. Cependant cette réduction est lente quand N augmente à cause de la racine.

Les résultats précédents sont basés (mathématiquement) sur l'hypothèse que les observations se répartissent selon une distribution normale (où gaussienne) ce qui est très souvent le cas quand N devient « grand ».

Les histogramme ci-dessus résultent de la simulation avec Python d'une distribution normale de, respectivement, 10**3 puis 10**5 valeurs de x avec $\bar{x}=10$ et $\sigma_x=0{,}5$ (cf. paragraphe III pour l'utilisation de Python). On notera, en rouge, l'écart-type de $\sigma_{\bar{x}}=\sigma_x/\sqrt{N}$.






```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 10**3

A=np.random.normal(10,0.5,size=N)
B=np.random.normal(10,0.5/np.sqrt(N),size=N)

plt.hist(A,bins='rice')
plt.hist(B,bins='rice', color="red")
plt.xlabel('Valeurs de x')
plt.title('bleu: distribution de x; rouge: distribution de x moyen')

plt.show()
```

IV – COMPARAISON DE DEUX MESURES

1) On utilise l'écart normalisé (appelé aussi z-score)

Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.

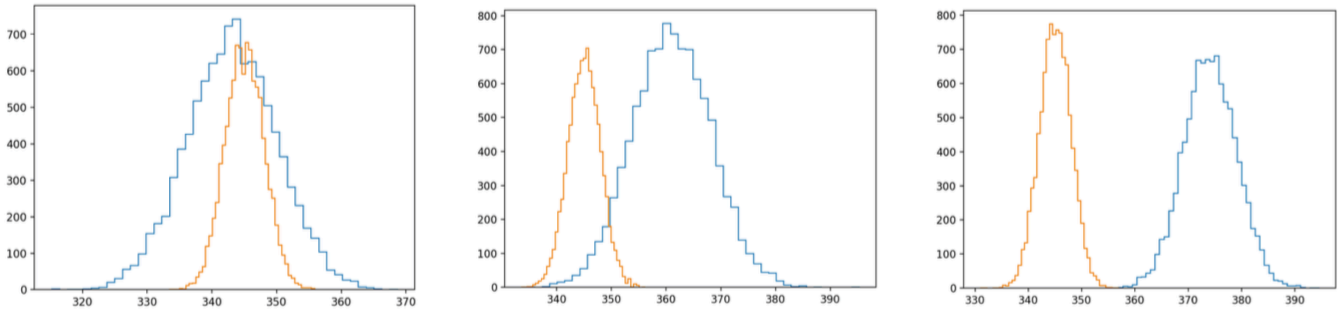
L'écart normalisé E_N entre deux processus de mesure donnant les valeurs x_1 et x_2 et d'incertitudes-types respectives $u(x_1)$ et $u(x_2)$ est défini par :

$$E_N=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2+u(x_2)^2}}$$

Par convention, on qualifie souvent deux résultats de ***compatibles*** si leur écart normalisé vérifie la propriété $E_N\leq 2$ environ.

Ce seuil à 2 est d'origine historique. Si $E_N>3$, nous sommes quasi certain que les deux résultats sont incompatibles. Entre 2 et 3, il s'agit d'une zone grise où il est difficile de se prononcer.

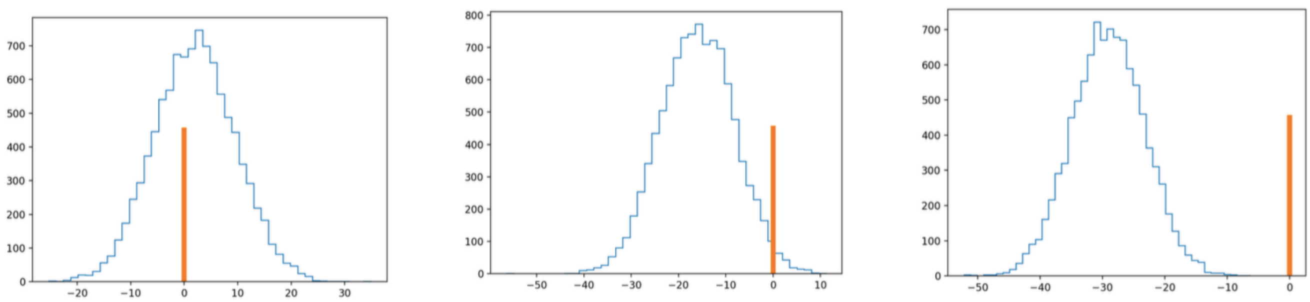
On constate avec les trois histogrammes ci-dessous (3a), (3b) et (3c) que les distributions se chevauchent si E_N est suffisamment petit. Dans ce cas, cela signifie que les deux résultats de mesure sont compatibles.



(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$. (b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$. (c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.

2) Quelle est la signification de l'expression de l'écart normalisé ?

Lorsque deux mesures sont cohérentes, on s'attend à ce qu'elles ne coïncident pas exactement, mais qu'elles ne s'écartent l'une de l'autre au plus que de quelques incertitudes-type.
Pour respecter cette définition, prenons deux valeurs expérimentales que l'on souhaite comparer x_1 et x_2, d'incertitudes-type $u(x_1)$ et $u(x_2)$. Si x_1 et x_2 peuvent être considérées comme compatibles, cela implique que la valeur 0 n'est éloignée de $x_1 - x_2$ que de quelques $u(x_1 - x_2)$.
Nous verrons dans le prochain paragraphe que que $u(x_1 - x_2) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$.
Ainsi, E_N compare $x_1 - x_2 - 0$ et $u(x_1 - x_2)$. Autrement dit, ce rapport donne le nombre d'incertitudes-type séparant 0 de $u(x_1 - x_2)$. Si ce nombre est trop grand, 0 n'est pas compatible avec $x_1 - x_2$ et donc x_1 et x_2 ne sont pas compatibles.
Dans les trois figures ci-dessous, la barre verticale représente la valeur 0. On constate bien que, si E_N est trop grand, alors cela implique que la valeur 0 est séparée de tous les points de mesure d'un trop grand nombre de fois l'incertitude-type.



(a) Simulation d'un calcul de $m_1 - m_2$ point par point avec les distributions de la figure 3a.
(b) Simulation d'un calcul de $m_1 - m_2$ point par point avec les distributions de la figure 3b.
(c) Simulation d'un calcul de $m_1 - m_2$ point par point avec avec les distributions de la figure 3c.

3) Comparaison à une mesure de référence?

Il est parfois possible de comparer le résultat de notre mesure à une **valeur de référence**. C'est une valeur de la grandeur physique dont on a de bonnes raisons de penser que son incertitude-type est négligeable devant celle de la valeur qu'on a obtenue. En pratique, une valeur de référence peut se trouver dans les tables de données comme par exemple en sciences physiques dans le Handbook of Chemistry and Physics (version papier ou numérique) qui fait référence dans le monde.

Dans ce cas l'écart normalisé s'écrit : $E_N = \dfrac{\left|x - x_{ref}\right|}{u(x)}$, car on néglige l'incertitude-type de la valeur de référence par rapport à celle de notre mesure.

III – LES INCERTITUDES-TYPES COMPOSEES

Très souvent, la mesure expérimentale n'est pas le résultat recherché de l'expérience. Il faut souvent combiner des mesures entre elles pour obtenir le résultat souhaité. ***Attention !*** Les mesures doivent être indépendantes entre elles pour que ces relations soient valides.

On considère une grandeur q qui dépend de grandeurs indépendantes $x,\ldots, w$ dont on connaît les incertitudes-types $u(x)$, …, $u(w)$.

- ***SOMME ET DIFFERENCE*** : Si $q = x + \cdots + z - (p + \cdots + w)$ alors :

$$u(q) = \sqrt{u(x)^2 + \cdots + u(z)^2 + u(p)^2 + \cdots + u(w)^2}$$

(somme et différence)

- ***PRODUIT ET QUOTIENT*** : Si $q = \dfrac{x \times \cdots \times z}{p \times \cdots \times w}$ alors :

$$\frac{u(q)}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{u(z)}{z}\right)^2 + \left(\frac{u(p)}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{u(w)}{w}\right)^2}$$

(produit et quotient)

- ***GRANDEUR MESUREE MULTIPLIEE PAR UN NOMBRE EXACT*** : Si $q = B\,x$ (B est connu exactement) alors :

$u(q) = |B|\,u(x)$ ou de façon équivalente $\dfrac{u(q)}{|q|} = \dfrac{u(x)}{|x|}$

($\times$ nombre exact)

• ***GRANDEUR MESUREE ELEVEE A UNE PUISSANCE***: Si n est un nombre exact et $q = x^n$ alors :

$$\frac{u(q)}{|\overline{q}|} = |n| \frac{u(x)}{|\overline{x}|}$$

(élevée à une puissance)

• ***INCERTITUDE POUR UNE FONCTION D'UNE VARIABLE*** : Si $q = q(x)$ fonction de x alors :

$$u(q) = \left|\frac{dq}{dx}\right| u(x)$$

(Pas explicitement au programme)

• ***RELATION GENERALE POUR LA PROPAGATION DES ERREURS*** : Si $q = q(x,\cdots,z)$ fonction de $x,\cdots,z$ alors :

$$u(q) = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} u(x)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial q}{\partial z} u(z)\right)^2}$$

(Pas explicitement au programme)

III – UTILISATION DE PYTHON

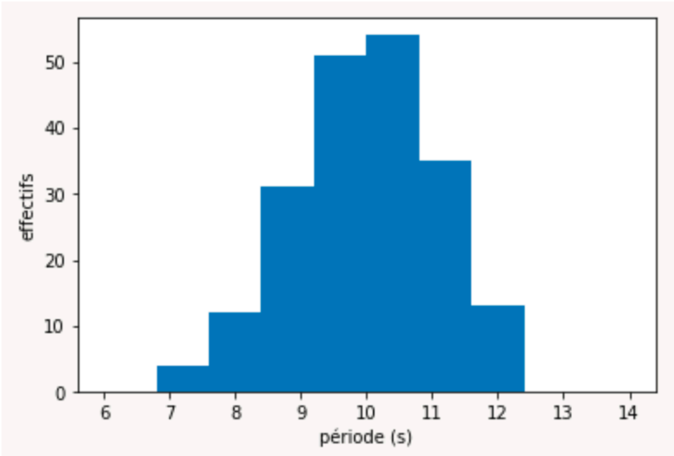
1) Construction d'un histogramme

Pour tracer un histogramme avec le langage de programmation Python, il faut d'abord charger la bibliothèque `matplotlib.pyplot` qui permet d'afficher de nombreuses représentations graphiques, dont les histogrammes. On importe également la bibliothèque numpy pour bénéficier de fonctions avancées permettant de traiter globalement des ensembles de données et, pour ce qui nous intéresse, de les importer depuis un fichier texte. La fonction `hist` permet de tracer un histogramme, comme dans l'exemple suivant.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# import depuis le fichier donnees.txt
data = np.loadtxt('donnees.txt')

# construction de l'histogramme avec la règle de Rice
plt.hist(data, bins='rice',label='Histogramme des effectifs»))

# légende de l'axe des abscisses
plt.xlabel('période (s)')
# légende de l'axe des ordonnées
plt.ylabel('effectifs')
# affichage du titre du graphique
plt.legend()
 # affichage du graphique
plt.show()
```

On peut utiliser des options supplémentaires dans l'argument de `plt.hist` :

✔ `histtype='step'` ne trace que le contour de l'histogramme, ce qui permet d'en superposer plusieurs de manière lisible.



✔ `range=[valmin, valmax]` permet d'ajuster les bornes gauche et droite de l'axe des abscisses.
✔ `bins='rice'` impose un nombre de classes en suivant sur la règle de Rice ; on peut imposer un nombre donné de classes (de barres) en écrivant, par exemple : `bins=20`.

Pour lire un fichier avec Python, une solution est d'utiliser la fonction numpy `loadtxt`. En effet, les données sont souvent stockées dans des tableaux réguliers et peuvent donc être vues comme des matrices. Par exemple, pour lire un fichier de 4 colonnes de données, voici la démarche à suivre :

```
1 21 100
2 22 101
3 23 102
4 24 103
5 25 104
6 26 105
7 27 106
8 28 107
9 29 108
10 30 109
```

```
>>> import numpy as np
>>> M = np.loadtxt('datafile.txt')
>>> type(M)
<type 'numpy.ndarray'>
>>> M
array([[   1.,   21.,  100.],
       [   2.,   22.,  101.],
       [   3.,   23.,  102.],
       [   4.,   24.,  103.],
       [   5.,   25.,  104.],
       [   6.,   26.,  105.],
       [   7.,   27.,  106.],
       [   8.,   28.,  107.],
       [   9.,   29.,  108.],
       [  10.,   30.,  109.]])
```

Il est possible de lire des données séparément en utilisant `unpack=True`, par exemple :

```
>>> x,y,z = np.loadtxt('datafile.txt', unpack=True)
>>> x
array([  1.,   2.,   3.,   4.,   5.,   6.,   7.,   8.,   9.,  10.])
>>> y
array([ 21.,  22.,  23.,  24.,  25.,  26.,  27.,  28.,  29.,  30.])
>>> z
array([ 100.,  101.,  102.,  103.,  104.,  105.,  106.,  107.,  108.,  109.])
```

Pour plus d'information : https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.loadtxt.html

2) Expérience avec variabilité observée, incertitude de type A

(D'après K Moris, PCSI, Chimie, Lycée Berthollet)

On procède à la mesure d'un volume d'eau de 50 mL à l'aide d'une éprouvette graduée, par lecture de la graduation correspondante. Ensuite, les volumes sont estimés plus précisément par pesée à l'aide d'une balance de précision.

✔ Observations expérimentales avec *N*=7

Volume V (mL)	49,6	49,7	50,0	50,3	49,9	50,1	50,2

✔ Calculs à la main

- Moyenne des observations : $\overline{V} = \ldots$
- Ecart-type sur une mesure: $\sigma_V = \ldots$
- Ecart-type sur la moyenne: $\sigma_{\overline{V}} = \ldots$
- Résultats de la mesure avec un nombre de chiffres significatifs adapté : $V = \ldots$

Remarques:
C'est le nombre de chiffres significatifs retenus pour l'incertitude-type qui impose le nombre de chiffres significatifs de la mesure, il faut la même précision pour le nombre de chiffres après la virgule.

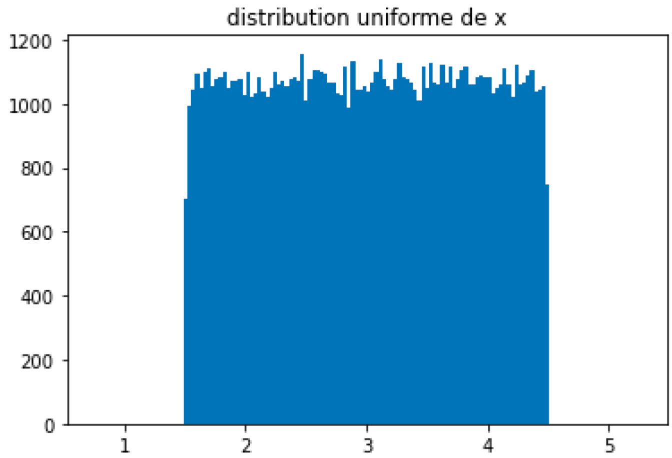
✔ Calculs avec Python

Encore une fois, il faut utiliser la bibliothèque numpy avec les fonctions mean pour la valeur moyenne et `std` pour l'écart-type sur une mesure (l'écart-type en anglais se dit « standard deviation » d'où la notation `std`).

```
import numpy as np

# creation de la liste de donnees
V=[49.6,49.7,50.0,50.3,49.9,50.1,50.2]

#calcul du nombre de donnees
N=len(V)
# calcul de la moyenne
moyenne=np.mean(V)
# calcul de l'ecart-type, ddof=1 pour diviser par N-1 au denominateur
ecart_type=np.std(V,ddof=1)
# calcul de l'incertitude type sur la moyenne
incertitude_type=ecart_type/(N**(1/2))

print("Valeur moyenne =",moyenne)
print("Ecart type =",ecart_type)
print("Incertitude-type =",incertitude_type)
print("Resultat de la mesure =",moyenne, '+-',incertitude_type)

Valeur moyenne = 49.971428571428575
Ecart type = 0.25634797778466145
Incertitude-type = 0.09689042833036066
Resultat de la mesure = 49.971428571428575 +- 0.09689042833036066
```

3) Simulation d'une expérience sans variabilité observée, incertitude de type B

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# choix de la demi-largeur
delta=1.5
# choix de la valeur centrale
valeur_centrale=3
# choix du nombre d'observations simulees
Nsim = 10**5
# produire Nsim observations reparties uniformement dans l'interval choisi
data = np.random.uniform(valeur_centrale-delta, valeur_centrale+delta, Nsim)

# generation de l'histogramme
plt.hist(data,bins='rice',range=[valeur_centrale-1.5*delta,valeur_centrale+1.5*delta])
plt.title("distribution uniforme de x")
plt.show()

print('delta sur racine(3) =', delta/np.sqrt(3) )
print('ecart-type sur la distribution =', np.std(data, ddof=1))
```




```
delta sur racine(3) = 0.8660254037844387
ecart-type sur la distribution = 0.8650868202860436
```

bins='rice' impose un nombre de classes en suivant la règle de Rice, on peut imposer un nombre donné de classes en écrivant, par exemple bins=20.

On constate sur cette simulation d'une expérience sans variabilité observée que le choix de $\frac{\Delta}{\sqrt{3}}$ pour l'incertitude-type est pertinent si on le compare au résultat du calcul exact de l'écart-type de cette distribution (observations réparties de façon uniforme sur l'intervalle choisi).