Mécanique et équilibre chimique

Extrait de l'entête des sujets de la banque PT :

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Exercice 1 : Equilibre chimique en solution aqueuse

On considère l'équilibre acide-base suivant à 25°C :

$$HONH_{2(aq)} + H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows HONH^+_{3(aq)} + HO^-_{(aq)} \quad K = 8{,}7\times 10^{-9} \text{ à } 25^\circ\text{C}$$

On part d'une solution initiale d'hydroxylamine $HONH_{2(aq)}$ à $0{,}75\ \text{mol.L}^{-1}$.

Déterminez la concentration des espèces à l'équilibre. On justifiera les hypothèses utilisées le cas échéant. On négligera toute autre source de production des ions hydroxydes $HO^-_{(aq)}$.

Exercice 2 : Système {masse-ressort} horizontal

Une masse de valeur $m = 200$ g est attachée à un ressort de constante de raideur $k = 20\ \text{N.m}^{-1}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10$ cm. Le ressort est comprimé d'une longueur $L = 10$ cm puis abandonné sans vitesse initiale. Il n'y a pas de frottements. La masse va se mettre à osciller. On repère la position de la masse par sa position horizontale $x(t)$. On prendra comme origine $x = 0$ la longueur à vide du ressort à vide (ici la position d'équilibre). Dans les questions suivantes, on donnera ***les réponses littérales*** et si cela est demandé, on fera les applications numériques.

1) Faire un schéma clair de la situation pour une position quelconque de la masse. On représentera en particulier le système de coordonnées utilisé et les forces en présences. On travaille dans le référentiel supposé galiléen du laboratoire.

2) Par application de la seconde loi de Newton, déterminez l'équation différentielle qui gouverne l'évolution de $x(t)$. On fera apparaître ω_0 la pulsation caractéristique du système {masse-ressort}.

3) Résoudre l'équation différentielle précédente avec les conditions initiales de l'énoncé (c'est-à-dire donnez l'expression de $x(t)$). Tracez l'allure de $x(t)$. Calculez la valeur numérique de la période des oscillations T.

4) On rappelle que l'énergie potentielle du système {masse-ressort} est donnée par $E_p = \frac{1}{2}kx^2$. Déterminez l'énergie mécanique $E_m \equiv E_c(\text{énergie cinétique}) + E_p$ du système. Que peut-on dire de sa valeur au cours du temps ? Donnez sa valeur numérique.

5) On tracera sur un même premier graphe l'évolution de E_p, E_c et E_m en fonction du temps sur une période $2T$. On indiquera à quels instants l'énergie cinétique est maximale, minimale (justifiez). De même pour l'énergie potentielle.

6) On tracera sur un même deuxième graphe l'évolution de E_p, E_c et E_m en fonction cette fois de la position x de la masse. On justifiera le tracer.

Problème : Autour de la luge **(Extrait concours ATS)**

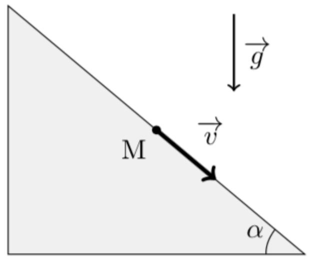
La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur est allongé, sur le dos et les pieds en avant, sur la luge qui glisse sur une piste de glace. Pour freiner, le lugeur ne peut compter que sur ses pieds car la luge ne comporte pas de frein. Les spécialistes peuvent atteindre des vitesses supérieures à 100 km/h.

---

1 • Trajectoires.

Pour la modélisation, on assimile l'ensemble {luge+lugeur} (désigné par la suite sour le terme simple de luge) à un point matériel M de masse $m = 100$ kg. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 10$ m.s^{-2}.

Descente rectiligne



Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse $v_0 = 5{,}0$ m.s^{-1}. Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10% (on descend verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On appelle α l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le point M est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré.

1·1 - Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur la luge et dessiner un schéma représentant ces forces, en justifiant soigneusement leur direction et leur sens.

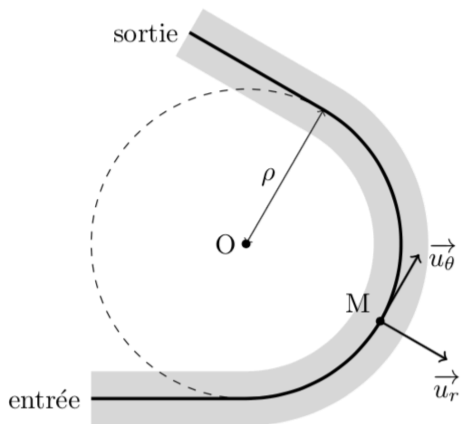
1·2 - Par application de la relation fondamentale de la dynamique, exprimer et calculer numériquement l'accélération a de la luge en fonction de l'accélération de la pesanteur g et de l'angle α.

1·3 - L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée. Donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Au bout de quelle durée t_a la luge atteint-elle la vitesse $v_a = 30$ m.s^{-1} ? Application numérique.

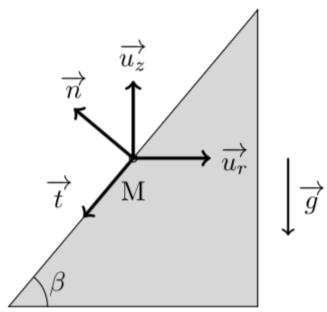
1·4 - Quelle est la distance parcourue lorsque la luge atteint la vitesse v_a ? Application numérique.

Virage circulaire

À présent, le point M est en mouvement circulaire uniforme à la vitesse V, sur un cercle de rayon ρ.
La piste est inclinée latéralement d'un angle $\beta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
La trajectoire se situe dans un plan horizontal : $\overrightarrow{v} = \mathrm{V}\,\overrightarrow{u_\theta}$. Le trièdre de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ est orthonormé direct.
On désigne par $\overrightarrow{\mathrm{R}} = \mathrm{R_N}\,\overrightarrow{n} + \mathrm{R_T}\,\overrightarrow{t}$ la réaction de la piste, qui n'est plus uniquement normale. Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{n}$ (normal) et $\overrightarrow{t}$ (tangent) sont définis sur la figure de droite ci-dessous.



Vue de dessus de la piste



Vue en coupe de la piste

1·5 - Exprimer l'accélération $\overrightarrow{a}$ en fonction de V, ρ et de $\overrightarrow{u_r}$. Justifier physiquement le sens de l'accélération.

1·6 - La luge n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction du support, écrire la relation fondamentale de la dynamique en projection dans le repère $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n})$.

1·7 - En déduire les expressions des réactions R_N et R_T en fonction de V, ρ, β, g et m.

1·8 - Quelle est la valeur V_c de la vitesse pour laquelle la réaction tangentielle est nulle ?
Écrire alors R_T en fonction de m, ρ, β et $(V^2 - V_c{}^2)$.

Soit $f = 0{,}4$ le coefficient de frottement latéral de la luge sur la piste de glace. Les lois du frottement solide indiquent que la luge ne dérape pas tant que $|R_T| < f\,R_N$. Dans la suite des questions, on ne considère que le cas $V \geq V_c$ ce qui correspond à un dérapage possible vers l'extérieur du virage.

1·9 - Montrer que V^2 doit respecter l'inégalité suivante pour éviter le dérapage :

$$V^2\,(\cos\beta - f\,\sin\beta) \leq g\,\rho\,(\sin\beta + f\,\cos\beta)$$

1·10 - En déduire que si l'inclinaison β est suffisante, il n'y aura jamais dérapage quelle que soit la vitesse V. Donner l'inclinaison minimale à respecter, qui dépend uniquement du coefficient f. Faire l'application numérique, en degrés.

1·11 - Si cette inclinaison minimale n'est pas respectée, montrer que la condition de non dérapage impose une vitesse V à ne pas dépasser, à exprimer en fonction de g, ρ, β et f. Que risque la luge si sa vitesse est trop grande ?

1·12 - Montrer à partir des résultats précédents qu'en l'absence de frottement latéral, on ne pourrait aborder le virage qu'à la vitesse V_c. Les frottements permettent ainsi d'avoir une certaine marge de vitesse dans un virage.