

Mécanique et filtre**Extrait de l'entête des sujets de la banque PT :**

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Problème 1: Pendule en rotation (extrait Banque PT, épreuve A)

Un autre type d'oscillateur mécanique peut être obtenu en utilisant un balancier couplé à un ressort spiral. On s'intéresse ici à la variation de la position angulaire, notée θ , du balancier, fixé à une extrémité du ressort. Ce balancier est mobile autour d'un axe Oz (voir Fig. F2). Le repère est supposé galiléen.

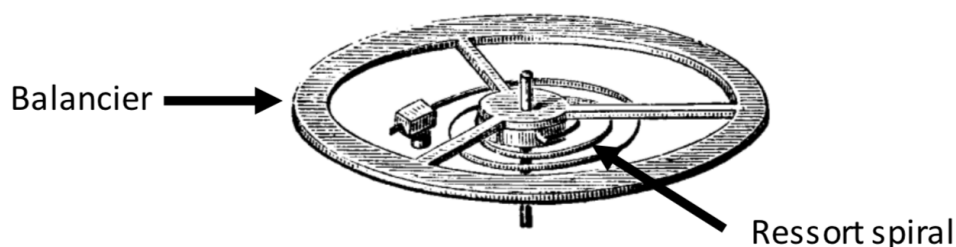


Figure F2. Balancier couplé à un ressort spiral.

Le couple de rappel de ce ressort est considéré comme proportionnel à l'élongation angulaire : $M_r = -C\theta$ où C est la constante de rappel du ressort spiral.

On tourne le balancier d'un angle initial θ_0 , et on le lâche sans vitesse initiale. Le mouvement est supposé avoir lieu sans frottement.

- Q12.** Déterminer l'équation différentielle qui régit le mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique (on introduira ici les grandeurs nécessaires à la mise en équation).
- Q13.** En déduire l'expression de la position angulaire en fonction du temps et l'expression de la période du mouvement.
- Q14.** La figure F3 montre un mécanisme d'horlogerie avec le ressort spiral et le balancier mais aussi un système dit d'échappement avec une "ancrer". À quoi peut servir ce système ?

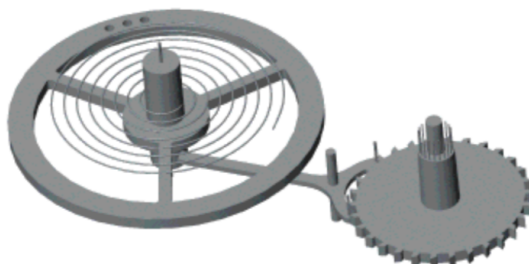


Figure F3. Mécanisme d'horlogerie avec ressort spiral et échappement.

http://help.solidworks.com/2018/french/SolidWorks/sldworks/c_Helix_and_Spiral.htm

Problème 2: Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m . On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5,0^\circ$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité : $I = \frac{1}{3}mL^2$.

- 1) Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
- 2) Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)}.$$

- 3) Montrer que cette relation peut être réécrite : $\sqrt{\frac{3g}{L}} dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}}$.

- 4) Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. On donne pour $\theta_0 = 5,0^\circ$: $\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} = 5,1$.

Problème 3: Filtre (extrait Banque PT, épreuve A)

Sur la Figure F9 on donne le schéma d'un filtre. On note $\underline{H}_F(\omega)$ sa fonction de transfert.

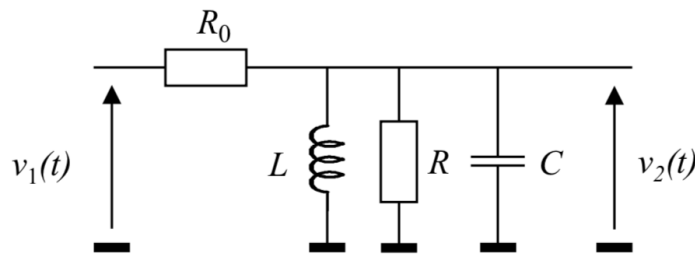


Figure F9. Schéma du filtre.

- Q45.** Déterminer l'expression de $\underline{H}_F(\omega)$ et la mettre sous la forme $\underline{H}_F = \frac{H_0}{1 + jQ_F \left[x - \frac{1}{x} \right]}$ avec

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 \text{ étant la pulsation propre du filtre.}$$

Expliciter littéralement Q_F , H_0 et la fréquence caractéristique f_0 .

- Q46.** Donner l'expression reliant le facteur de qualité, la fréquence propre et la bande passante à -3 dB.

On choisit $R_0 = 470 \, \Omega$, $R = 120 \, \Omega$, $L = 50 \, \mu\text{H}$ et $C = 50 \, \text{nF}$ de sorte que : $H_0 \approx 0,2$, $f_0 \approx 100 \, \text{kHz}$ et $Q_F \approx 3$.

- Q47.** Faire une représentation graphique approchée du gain en décibel G_{dB} en fonction de $\log(x)$; préciser quelques valeurs sur ce graphe. Faire apparaître sur ce graphe la "bande passante à -3 dB".