Mécanique

Extrait de l'entête des sujets de la banque PT :

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Attraction gravitationnelle *(extrait CCP, filière TSI)*

La troisième partie de ce problème est indépendante des deux premières.

On considère dans ce problème que la Terre possède une répartition de masse à symétrie sphérique, de centre O, de masse M_T et de rayon R_T. On pourra donc considérer que le champ gravitationnel créé par la Terre en un point M, extérieur à la Terre, est identique à celui créé par une masse ponctuelle M_T placée en O.

Préliminaire :

1 – On se place en un point M de l'espace, extérieur à la Terre et situé à une distance r du centre de celle-ci.
On notera $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.
Rappeler l'expression du champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ créé par la Terre en un point M de l'espace.
On exprimera $\vec{g}(M)$ en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, r et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.
Représenter le vecteur $\vec{g}(M)$ sur un schéma.

Première partie : Satellite en mouvement autour de la Terre

On étudie le mouvement autour de la Terre d'un satellite S de masse m placé dans le champ gravitationnel terrestre.
On néglige les frottements.

Caractéristiques du mouvement du satellite autour de la Terre

2 – On se place dans le référentiel, considéré comme galiléen, qui a pour origine le centre de la Terre et ses trois axes dirigés vers trois « étoiles fixes ». Quel est le nom de ce référentiel ?
Déterminer l'expression de la force $\vec{f}$ à laquelle le satellite S est soumis. On exprimera $\vec{f}$ en fonction de m, $\mathcal{G}$, M_T, r et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Déterminer de même l'expression de la force $\vec{f}'$ à laquelle la Terre est soumise de la part du satellite. Justifier.

3 – En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que le mouvement du satellite S est nécessairement plan.
Sachant qu'à l'instant $t = 0$ le satellite se trouve au point M_0 et a une vitesse v_0, préciser le plan dans lequel se fait le mouvement.

Dans la suite de cette partie, on se placera dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon *r* et d'altitude *h* autour de la Terre (avec $r = h + R_T$) et on utilisera les coordonnées cylindriques.

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, un point quelconque de l'espace étant repéré par ses coordonnées (r, θ, z).
Le plan dans lequel se fait le mouvement du satellite est le plan du repère cylindrique contenant l'origine O du repère (le point O étant le centre de la Terre) et les vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

4 – En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que le module *v* de la vitesse du satellite S est nécessairement constant au cours du mouvement et déterminer son expression en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et *r*.

Deuxième loi de Képler et conséquences

5 – Déterminer l'expression de la période *T* du mouvement de rotation de S autour de la Terre en fonction de *v* et de *r* puis en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et *r*. En déduire la troisième loi de Képler.

6 – Indiquer une méthode pour déterminer la masse de la Terre.
Donner sans justification l'ordre de grandeur de la masse de la Terre.

7 – Un autre satellite S', de masse *m'*, en orbite circulaire autour de la Terre a une trajectoire de rayon *r* égal au rayon de la trajectoire de S. Les deux satellites tournent dans le même plan.
S et S' risquent-ils de se heurter au cours de leur mouvement ? On justifiera la réponse apportée.

Deuxième partie : Etude énergétique

La force à laquelle le satellite S est soumis dérive d'une énergie potentielle E_p telle que E_p peut s'écrire sous la forme $E_p = -\dfrac{\alpha}{r}$ avec α constante positive. On prendra par convention une énergie potentielle nulle à l'infini.
On ne se limitera pas dans cette partie à un mouvement circulaire, mais on se placera dans le cas d'un mouvement quelconque du satellite S autour de la Terre.

On notera *C* la constante des aires donnée par $C = r^2 \dot{\theta}$.

8 – Déterminer l'expression de α en fonction des données du problème.

9 – Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite S en fonction de *m*, *r*, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ et α.
En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective du satellite en fonction de *m*, *C*, *r* et α.
Donner l'allure de la représentation graphique de l'énergie potentielle effective en fonction de *r*. En exploitant cette courbe, indiquer en fonction de la valeur de l'énergie mécanique le type de trajectoire suivie par le satellite et préciser dans chaque cas s'il s'agit d'un état de diffusion ou d'un état lié.

10 – Déterminer l'énergie mécanique E_{mc} associée à une trajectoire circulaire de rayon r_c en fonction de r_c, m, $\mathcal{G}$ et M_T.
Déterminer la première vitesse cosmique v_1, vitesse du satellite sur une orbite basse de rayon R_T autour de la Terre en fonction de R_T, $\mathcal{G}$ et M_T.

Troisième partie : Mesure de l'intensité du champ de pesanteur terrestre en un point

Un expérimentateur désire mesurer l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre. Il va pour cela utiliser tour à tour deux types différents de pendule.

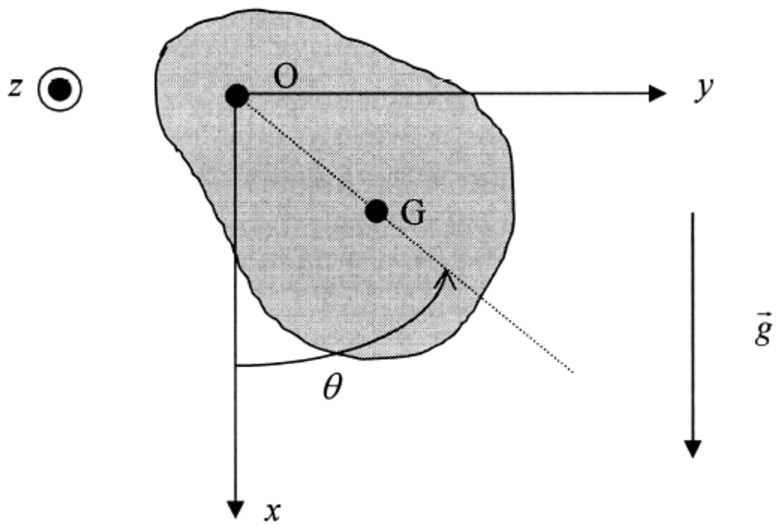
Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

Un pendule est composé par un solide de masse m, de centre d'inertie G, mobile autour d'un axe horizontal (Oz) et de moment d'inertie J par rapport à l'axe (Oz).
Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy), autour de l'axe horizontal (Oz).
La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale descendante.
On notera a la distance OG.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés.

Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = g\vec{e}_x$.

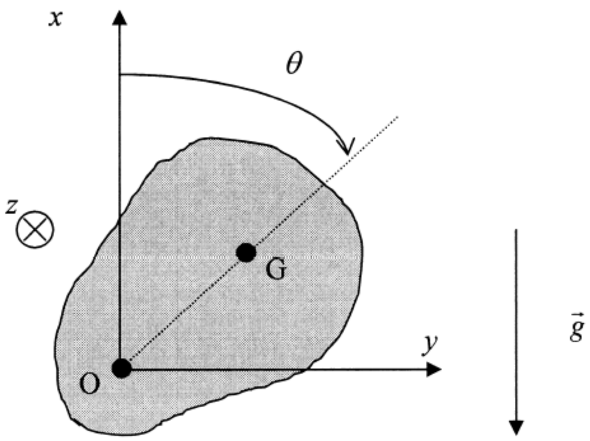


11 – En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps. En déduire la période T des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre, repérée par $\theta = 0$. On exprimera T en fonction de J, m, a et g.

12 – On souhaite étudier l'influence d'une variation d'intensité Δg du champ de pesanteur sur la période du pendule. Pour cela, on définit la sensibilité s du pendule comme le rapport $s = \dfrac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petite de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur.
Déterminer l'expression de la sensibilité s en fonction de Δg et g.

Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

Le pendule précédent est maintenant soumis à l'action d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel $M = -K\theta$ sur le pendule où K est une constante positive.
La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OG) et la verticale ascendante.



On notera a la distance OG.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements au niveau de l'axe de rotation et les frottements de l'air seront négligés.

Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\vec{g}$ tel que $\vec{g} = -g.\,\vec{e}_x$.

L'énergie potentielle du ressort spiral ne dépend que de l'angle θ et de la constante K et est donnée par l'expression $E_p(\theta) = \frac{1}{2}K\theta^2$.

13 – Exprimer l'énergie mécanique totale E_m du système pendule-ressort en fonction de K, θ, m, a, g, J et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

Sachant que le système est conservatif, en déduire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.

14 – En considérant que l'angle θ reste petit, déterminer la condition à vérifier pour que la position $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable d'un oscillateur harmonique. La relation sera donnée sous forme d'une relation entre K, m, g et a.
Déterminer dans ce cas la période T des petites oscillations du pendule autour de la position $\theta = 0$.
On exprimera T en fonction de K, J, g, a et m.

15 – On considère que la condition de la question précédente est vérifiée.
On souhaite étudier la sensibilité s_1 de ce pendule à une variation Δg du champ de pesanteur.
On définit, tout comme précédemment, s_1 par le rapport $s_1 = \frac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petite de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur.
Déterminer l'expression de la sensibilité s_1 en fonction de Δg, K, g, a et m.

16 – Montrer que l'on peut choisir la constante K de telle sorte que le deuxième pendule soit plus sensible que le premier et permette ainsi de détecter des variations plus faibles du champ de pesanteur terrestre. Exprimer cette condition sous forme d'une relation entre K, g, m et a.