Oscillations et ondes

Extrait de l'entête des sujets de la banque PT :

« La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. »

Problème 1: Système masse-ressort : oscillations libres et forcées, analogie électromécanique (extrait concours externe CAPLP-Maths-Sciences 2009)

I- Etude mécanique d'un système masse ressort

Les figures se trouvent en fin d'énoncé de cet exercice.

On dispose d'une masse m = 50 g et d'un ressort à spires non jointives. La masse du ressort est négligeable, sa constante de raideur est $k = 12{,}5\ \mathrm{N.m^{-1}}$ et sa longueur à vide $l_0 = 30\mathrm{cm}$. La masse est constituée par un cylindre en laiton de hauteur h = 2 cm et de rayon R = 1cm. L'intensité g de la pesanteur sera prise égale à $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Le référentiel d'étude est celui du laboratoire et il est supposé galiléen.

A. Oscillations libres sans amortissement.

Le ressort est accroché par son extrémité supérieure O à un support fixe. La masse est suspendue à l'autre extrémité du ressort (figure 1).

I.A1. Déterminer l_{eq}, longueur du ressort à l'équilibre. En déduire l'abscisse z_{eq} du centre de masse G de m. On fera les applications numériques.

I.A2. On étudie les oscillations autour de la position d'équilibre précédente. On note $x(t)$ l'écart entre la position de G à l'instant t et sa position d'équilibre.

a) Déterminer l'équation différentielle qui régit $x(t)$.
b) Quelle est la nature du mouvement attendu ? On calculera une grandeur caractéristique de ce mouvement.
c) Un dispositif non représenté sur la figure 1, permet d'enregistrer les variations de l'allongement en fonction du temps. La figure 2 fournit les courbes obtenues pour diverses conditions initiales.
   i. Préciser sans calcul, les conditions initiales (à t = 0) pour les trois cas envisagés.
   ii. Ces courbes sont-elles en accord avec le mouvement attendu ?

B. Oscillations libres avec amortissement.

Afin d'étudier l'influence du frottement fluide, la masse est plongée dans un liquide de masse volumique $\mu = 1130\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ (figure 3). La masse est constamment totalement immergée.

I.B1. Effectuer un bilan des forces agissant sur la masse à l'équilibre. Déterminer la nouvelle valeur l'_{eq} de la longueur du ressort.

I.B2. La force de frottement est donnée par $\vec{F} = -\alpha.\vec{v}$ où α est une constante et $\vec{v}$ la vitesse de la masse suivant Oz. On montre alors que l'équation différentielle du mouvement est donnée par :

$$m.\ddot{x} + \alpha.\dot{x} + k.x = 0$$

a) On souhaite obtenir un régime pseudopériodique. Comment faut-il choisir α ?

b) On suppose qu'on écarte la masse de a par rapport à l'équilibre et qu'on lâche sans vitesse initiale. La solution $x(t)$ est de la forme : $x(t) = A.\exp(-\lambda t).[\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t)]$. Donner l'expression littérale de la pseudo-période T du mouvement, ainsi que de λ, en fonction de $\lambda, m, \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

I.B3. On enregistre le mouvement de la masse avec le même système qu'en A. La courbe obtenue est donnée figure 4. On définit le décrément logarithmique comme $\delta = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{x(t)}{x(t+nT)}\right)$.

a) Déterminer δ à partir de l'enregistrement. En déduire la valeur de la constante α.

b) Etablir la relation théorique entre δ, α et T.

c) En déduire la valeur de la constante α.

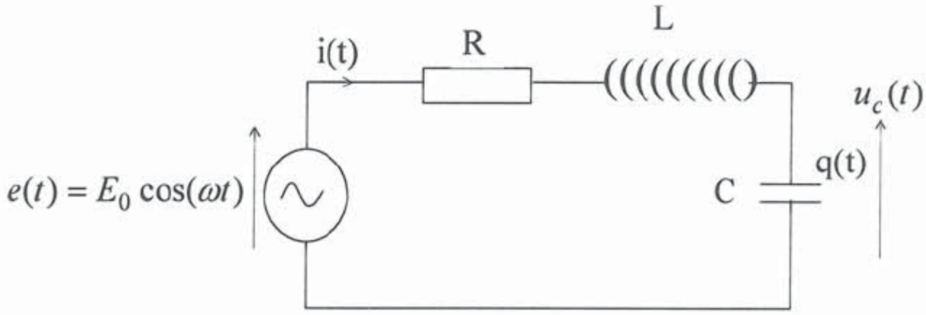
II- Oscillations forcées par analogie électromécanique

Pour étudier le régime sinusoïdal forcé du système masse ressort précédent, on peut forcer le mouvement de l'extrémité O à l'aide d'un système bielle manivelle. Le mouvement est alors régi par l'équation :

$$m.\ddot{x} + \alpha.\dot{x} + k.x = k.a.\cos(\omega t)$$

On a m = 50g, k = 12,5 N.m^{-1} et on choisit $a = 2cm$ α = 0,5 SI. Plutôt que l'étude mécanique, on utilise un analogue électrique formé par un circuit RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale $e(t) = E_0.\cos(\omega t)$.

II.1. On considère le schéma électrique ci-dessous :



a) On note q la charge du condensateur. Déterminer l'équation différentielle suivie par q.

b) Préciser l'analogie électromécanique à l'aide d'un tableau de correspondance. On donnera en particulier les équivalents électriques du déplacement $x(t)$, de la vitesse, de la force excitatrice, de la masse, du coefficient de frottement et de la constante de raideur du ressort.

c) On fixe R = 10Ω. Quelles valeurs faut-il imposer à L, C et E_0 pour que le système électrique ait les mêmes caractéristiques que le système mécanique, c'est-à-dire que $x(t)$ soit numériquement identique à tout instant à $q(t)$.

II.2. On s'intéresse à la solution en régime sinusoïdal forcé. On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre, et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ facteur de qualité. (On prend $j^2 = -1$)

a) Déterminer l'expression du courant $\underline{i(t)}$ en notation complexe, circulant dans le circuit RLC.

b) En déduire la tension $\underline{u_C(t)}$ aux bornes du condensateur.

c) A partir de l'étude aux hautes et basses fréquences de $\underline{i(t)}$ et $\underline{u_C(t)}$ donner une interprétation physique du mouvement de la masse m aux hautes et basses fréquences.

d) On pose $\underline{i(t)} = I(\omega).\exp\left(j\phi(\omega)\right)$. Donner les expressions de $I(\omega)$ et $\phi(\omega)$.

e) Montrer qu'il y a résonance d'intensité pour une pulsation que l'on déterminera. Donner l'allure des courbes $I(\omega)$ et $\phi(\omega)$.

f) Définir et calculer la bande passante en pulsation du circuit.

Mécanique

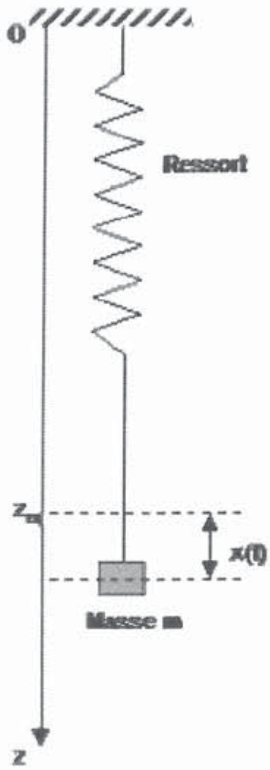


Figure 1

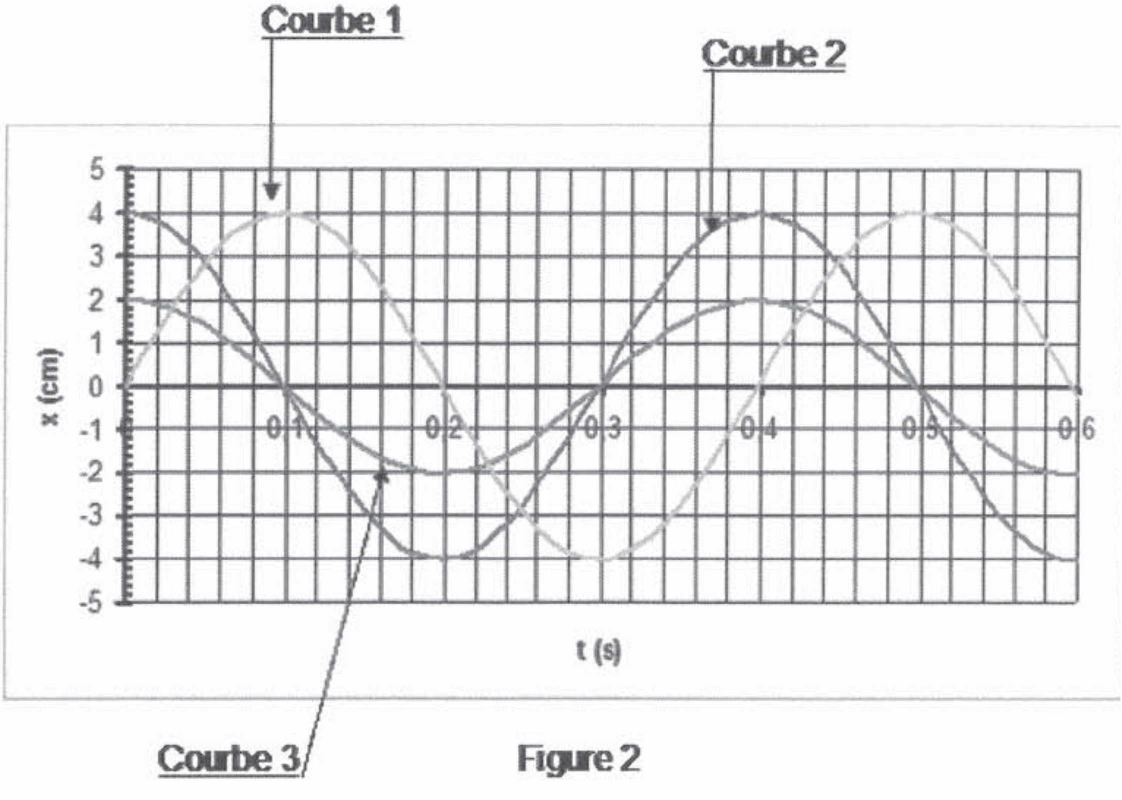


Figure 2

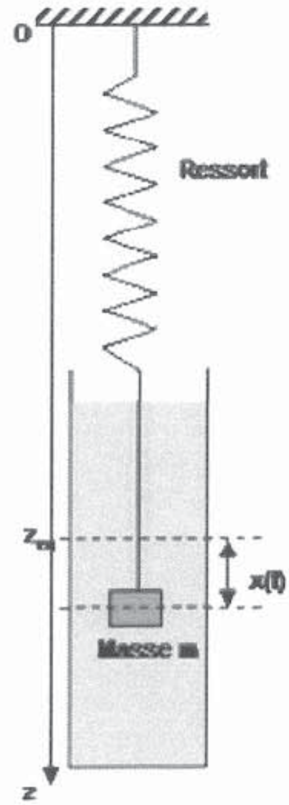


Figure 3

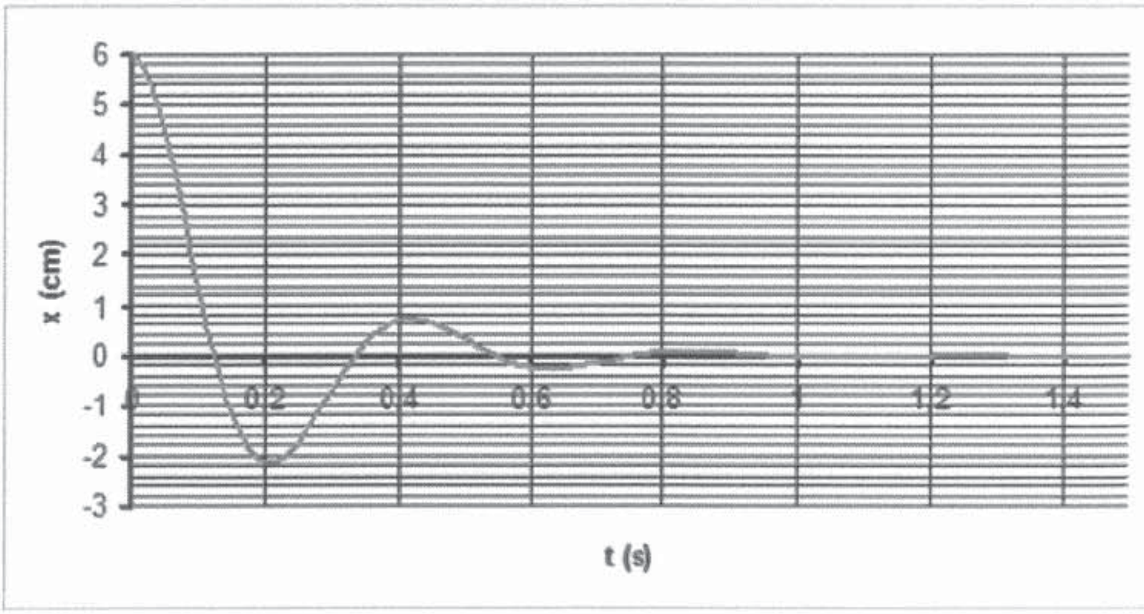


Figure 4

Problème 2 : Onde stationnaire sur une corde de guitare

On utilise successivement un diapason D de fréquence $f = 330$ Hz, une corde de guitare métallique C de masse linéique $\mu = 0{,}38 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}}$ et une guitare G, afin d'illustrer une étude théorique très simplifiée de la propagation des vibrations transversales le long d'une corde tendue. On négligera l'amortissement des vibrations et on admettra que la célérité c des vibrations transversales le long d'une corde tendue est donnée en fonction de F, tension de la corde, et μ, masse de la corde par unité de longueur, par la relation

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Ces deux exercices sont extraits de problèmes proposés au baccalauréat.

La corde C est tendue par une tension constante, F, entre l'extrémité A de la branche du diapason D et un point O fixe.

Pour une valeur convenable de la longueur $OA = l$, il se forme un système d'ondes stationnaires stables entre A et O, ces deux points étant alors des nœuds de vibration.

1° Définir la longueur d'onde λ de la vibration transversale se propageant le long de la corde.

2° Expliquer le phénomène d'ondes stationnaires et calculer l'élongation $y_M(t)$ d'un point M situé à la distance x de O à l'instant t.

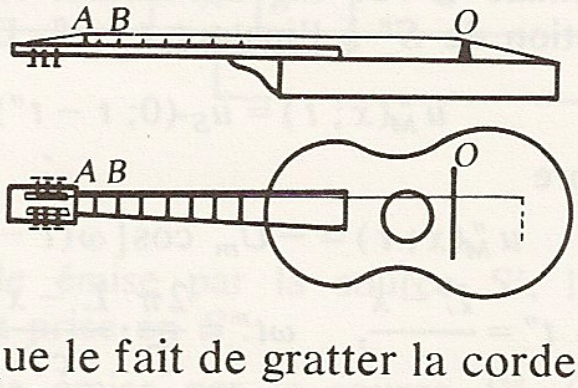
3° Préciser la position des nœuds et des ventres de vibration de la corde.

4° *Application numérique :*

a) Calculer la longueur d'onde λ pour une tension $F = 76$ N.

b) Quel est l'aspect de la corde pour $l = 68$ cm?

La corde C est à présent tendue entre les deux chevalets A et O de la guitare G sous une tension F réglable. Sur le manche de cette guitare sont fixés d'autres chevalets B, C, D parallèles aux deux premiers A et O mais légèrement moins hauts que ceux-ci pour ne pas toucher la corde ainsi tendue (fig. ci-dessous).



On admettra que le fait de gratter la corde provoque le long de celle-ci une vibration de fréquence f pour laquelle un fuseau stable se forme entre les deux nœuds de vibration A et O.

1° Pour accorder sa guitare, le guitariste ajuste la tension de la corde à $F = 76$ N. Calculer la fréquence f_1 de la vibration produite lorsqu'il gratte la corde AO.

Quelle note percevra-t-il pour $OA = l_1 = 68$ cm?

2° Avec un doigt de la main gauche, le guitariste appuie sur la corde entre A et B de façon à amener la corde au contact de B. La tension F n'est pas modifiée, mais la corde vibre maintenant entre O et B.

Quelle doit être la longueur AB séparant les deux chevalets A et B pour que le guitariste perçoive la note fa en grattant la corde de la main droite.

Applications numériques :

notes	do	ré	mi	fa	sol	la	si
fréquence f (Hz)	262	294	330	350	392	440	493