

Mécanique, ouverture au monde quantique

Extrait de l'entête des sujets de la banque PT :

« La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. »

Problème 1 : De la Terre à la Lune : Programme Apollo, 15 ans d'aventure spatiale (extrait Concours Centrale.Supélec, TSI, 2012)

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'Homme de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969. La première partie étudie le départ de la Terre, la seconde l'arrivée sur la Lune. La troisième étudie l'écoulement des gaz dans la tuyère d'un des cinq moteurs-fusées du premier étage de la fusée.

I De la Terre ...

La fusée lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.

I.A – Décollage

I.A.1) Choix du référentiel

- Définir les référentiels terrestre et géocentrique, notés respectivement \mathcal{R}_T et \mathcal{R}_G .
- Définir un référentiel galiléen.

Dans toute la suite, \mathcal{R}_G sera le référentiel d'étude, considéré comme galiléen.

- Justifier ce choix.

I.A.2) Influence de la base de lancement

La Terre, associée à une sphère de rayon $R_T = 6,38 \times 10^3$ km, est animée d'un mouvement de rotation uniforme (**figure 1**) autour de l'axe Sud-Nord Tz , à la vitesse angulaire $\Omega = 7,29 \times 10^{-5}$ rad · s⁻¹.

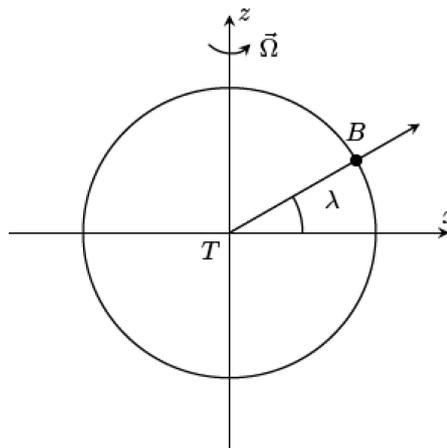


Figure 1 Latitude

- Donner la nature de la trajectoire d'un point B à la surface de la Terre, situé à la latitude λ .
 - Établir l'expression du module v_B de sa vitesse.
 - Application numérique : Calculer v_{B1} pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-unis ($\lambda_1 = 28,5^\circ$) et v_{B2} pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,2^\circ$).
- Une fusée de masse m_F décolle du point B , sans vitesse initiale par rapport à la Terre, pour atteindre une orbite circulaire autour de la Terre avec la vitesse finale v_0 par rapport à \mathcal{R}_G .
- Déterminer l'expression de la variation d'énergie cinétique ΔE_c de la fusée, en fonction de v_B , v_0 et m_F .
 - Calculer numériquement l'économie relative réalisée, définie par $\frac{\Delta E_{c1} - \Delta E_{c2}}{\Delta E_{c1}}$, en choisissant la base de Kourou plutôt que celle de Cap Canaveral, avec $v_0 = 8$ km · s⁻¹. Commenter.
 - Quel(s) autre(s) avantage(s) présente la base de Kourou ?

I.B.3) Mouvement d'un satellite

Un satellite de masse m_F est en orbite autour de la Terre à la distance r de son centre.

a) Donner l'expression de l'énergie potentielle E_{p0} associée, en la choisissant nulle pour $r \rightarrow \infty$.

b) Montrer que la trajectoire est plane. Quelle est sa nature ?

La trajectoire est maintenant considérée circulaire.

c) Exprimer la vitesse v_0 de la fusée, ainsi que son énergie cinétique E_{c0} , en fonction de \mathcal{G} , m_F , m_T et r .

d) Exprimer le rapport $\frac{T_0^2}{r^3}$, où T représente la période de révolution du satellite, en fonction de \mathcal{G} et m_T .

Quel est le nom de cette loi ? Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a , demi-grand axe de l'ellipse.

e) Application numérique : calculer v_0 et T_0 pour une orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$).

f) Donner enfin l'expression de l'énergie mécanique de la fusée sous la forme $E_{m0} = -\frac{K}{2r}$, en précisant la valeur de K . Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a , demi-grand axe de l'ellipse.

Données : $G \times m_T = 4,0 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ avec m_T la masse de la Terre et G la constante universelle de gravitation.

II ... à la Lune.

II.A - Objectif Lune

II.A.1) Orbite de transfert

La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1 , de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où d_{TL} représente la distance Terre-Lune (Figure 2).



Figure 2 Orbite de transfert

a) Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire.

b) En déduire l'expression de la vitesse v_1 . Application numérique.

c) Où est placée la Terre par rapport à cette ellipse ? À quel instant doit-on allumer les moteurs ?

d) Évaluer numériquement la durée t_1 du transfert Terre-Lune (parcours de la moitié de l'ellipse). On donne $d_{TL} = 3,8 \times 10^8 \text{ m}$.

II.A.2) Orbite lunaire

Au voisinage de la Lune, de rayon R_L et de masse m_L , l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable.

L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.

Les paramètres du vol sont calculés pour qu'en cas de panne des moteurs, la fusée contourne la Lune pour revenir sur la Terre. (Ce fut le cas lors de la mission Apollo XIII). À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.

a) Faut-il freiner ou accélérer ? Justifier qualitativement.

b) Déterminer numériquement v_2 , vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune, avec $\mathcal{G} \times m_L = 4,9 \times 10^{12} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ et $R_L = 1,74 \times 10^3 \text{ km}$.

Problème 2 : Atome d'hydrogène, modèle de Bohr (extrait Concours ATS, 2010)

Les données suivantes pourront être utiles :

- Masse d'un proton : $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg
- Masse molaire de l'hydrogène : $M_H = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C
- Constante de Planck : $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J · s
- Énergie d'un photon de fréquence ν : $\mathcal{E} = h\nu$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$ F · m⁻¹
- Constante gravitationnelle : $\mathcal{G} = 6,7 \cdot 10^{-11}$ m³ · kg⁻¹ · s⁻²
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹
- Pression standard $p^\circ = 1 \text{ bar} = 10^5$ Pa
- Enthalpie standard de formation à $T = 298$ K : $\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}(\ell)) = -285,83$ kJ · mol⁻¹
- Capacités molaires standards :
 - $C_{p,m}^\circ(\text{H}_2\text{O}(\ell)) = 75,291$ J · K⁻¹ · mol⁻¹
 - $C_{p,m}^\circ(\text{O}_2) = 29,355$ J · K⁻¹ · mol⁻¹
 - $C_{p,m}^\circ(\text{H}_2) = 28,824$ J · K⁻¹ · mol⁻¹

I. Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

On considère l'atome d'hydrogène $\frac{1}{2}\text{H}$.

I.1. Quel est le numéro atomique Z de l'atome d'hydrogène ? Préciser la composition de cet atome.

On étudie dans la suite le mouvement de l'électron autour du noyau de l'atome $\frac{1}{2}\text{H}$.

La force électrostatique subie par l'électron est dirigée selon la droite proton-électron. Cette force attractive a pour intensité $F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$, où e est la charge élémentaire et r la distance proton-électron.

I.2. L'interaction électrostatique est-elle toujours attractive ?

I.3. Exprimer l'intensité de l'interaction gravitationnelle F_g subie par l'électron de la part du noyau. On notera \mathcal{G} la constante gravitationnelle. Cette interaction est-elle toujours attractive ?

I.4. Calculer un ordre de grandeur du rapport F_g/F_e . En déduire que l'on peut négliger l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électrostatique.

I.5. Placer sur un schéma, représentant le système mécanique étudié, la force électrostatique qui s'exerce sur l'électron et la base mobile adaptée à l'étude de son mouvement.

Pour décrire l'atome d'hydrogène, Rutherford a utilisé un modèle planétaire dans le cadre de la mécanique newtonienne : l'électron a un mouvement circulaire, de rayon r , autour du noyau supposé fixe. Par la suite, on considérera le proton comme immobile dans un référentiel galiléen.

I.6. A partir de la relation fondamentale de la dynamique, montrer que le mouvement de l'électron est uniforme.

I.7. En déduire l'expression de la vitesse de l'électron v en fonction de ε_0 , e , r et m_e .

I.8. Exprimer l'énergie cinétique de l'électron \mathcal{E}_c en fonction de ε_0 , e et r .

I.9. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle \mathcal{E}_p associée à l'interaction électrostatique (On conviendra de choisir $\mathcal{E}_p(r \rightarrow \infty) = 0$).

I.10. Montrer que l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de l'électron s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Commenter le signe.

Lors de l'étude de l'atome d'hydrogène, différents faits expérimentaux ont conduit Niels Bohr à formuler l'hypothèse suivante : l'électron ne peut se déplacer que sur certains cercles dont les rayons r_n obéissent à la loi (quantification du moment cinétique) :

$$L = n\hbar$$

où :

- L : moment cinétique de l'électron
- \hbar : constante de Planck réduite, $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- n : nombre entier ≥ 1

I.11. Exprimer la norme du moment cinétique L en fonction de m_e , r_n et de sa vitesse v_n sur le cercle de rayon r_n .

I.12. En déduire l'expression de r_n en fonction des constantes ε_0 , e , \hbar , m_e et de n puis en fonction de r_1 et n .

I.13. Déterminer l'expression de \mathcal{E}_n , énergie mécanique de l'électron sur le cercle de rayon r_n , en fonction de ε_0 , e , \hbar , m_e et de n . En déduire que \mathcal{E}_n est de la forme :

$$\mathcal{E}_n = \frac{\mathcal{E}_1}{n^2}$$

On exprimera \mathcal{E}_1 en fonction de ε_0 , e et r_1 .

I.14. Calculer r_1 , puis calculer \mathcal{E}_1 en joule et en électronvolt ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

II. Spectre de l'atome d'hydrogène

II.1. Quelle est l'expression de la fréquence ν puis de la longueur d'onde λ d'un photon émis lorsque l'électron passe d'un niveau d'énergie \mathcal{E}_p à un niveau d'énergie \mathcal{E}_n ($p > n$) ?

En 1885, Joseph Balmer observe le spectre visible de l'atome d'hydrogène. Il constate que $1/\lambda$ est proportionnel à $\frac{1}{4} - \frac{1}{p^2}$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_h \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p^2} \right)$$

II.2. Déterminer l'expression de R_h en fonction de \mathcal{E}_1 , h et c .

II.3. À quelle valeur de n la série de raies de l'atome d'hydrogène observée par Joseph Balmer correspond-elle ?

II.4. Déterminer les longueurs d'onde des raies de cette série pour p allant jusqu'à 5. On prendra pour les applications numériques $R_h = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

II.5. Quel intervalle de longueurs d'onde définit habituellement le spectre visible ?



Niels Bohr (1885-1962), physicien Danois, prix Nobel de physique en 1922. Il fut l'un des principaux artisans de l'édification de la physique quantique.

Albert Einstein et Niels Bohr en 1930 à l'occasion d'un Congrès Solvay. (Photo de Paul Ehrenfest)