Problème 1: Autour du calcium (Extrait concours CCP, PC, 2015)

Le calcium est le cinquième élément le plus abondant de la croûte terrestre. On le trouve dans les roches calcaires constituées principalement de carbonate de calcium $CaCO_3$. Le calcium joue un rôle essentiel chez la plupart des organismes vivants vertébrés en contribuant notamment à la formation des os ou des dents… Le calcium a également de nombreuses applications dans l'industrie en tant que réducteur des fluorures d'uranium notamment de désoxydant pour différents alliages ferreux et non-ferreux, de désulfurant des hydrocarbures. Dans la métallurgie du plomb, les alliages calcium-magnésium sont utilisés afin d'éliminer les impuretés de bismuth.

A1 Atomistique

A1.1 Préciser la composition du noyau de l'atome de calcium ${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$.

A1.2 Ecrire la configuration électronique du calcium ${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$ dans son état fondamental. En déduire le nombre d'électrons de valence du calcium et sa position (colonne et période) dans la classification périodique.

A2 Radioactivité et datation K-Ar (cf. document 1)

Soit un nucléide M, se décomposant selon un seul mode de désintégration nucléaire d'ordre 1, de constante de vitesse k et de période radioactive (ou temps de demi-vie) T. On notera $P_M(0)$ la population de ce nucléide M à la date $t = 0$ et $P_M(t)$ celle à la date t.

A2.1 Etablir en fonction du temps t la loi d'évolution $P_M(t)$ de la population en nucléide M. En déduire la relation entre k et T.

A2.2 En tenant compte des deux principaux modes de désintégration nucléaire du potassium ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$ présentés dans le document 1, établir l'équation différentielle portant sur la population $P_K(t)$. En déduire la loi d'évolution $P_K(t)$.

A2.3 Etablir de même la loi d'évolution $P_{Ar}(t)$. Retrouver la relation (**1**), présentée dans le document 1, entre $P_K(t)$ et $P_{Ar}(t)$.

A2.4 A partir de l'étude du rapport $\dfrac{P_K(0)}{P_K(t)}$, établir la relation (**2**) présentée dans le document 1 et permettant de dater un échantillon de roche. Estimer l'âge de la cendre volcanique de Okote.

Document 1 - Radioactivité et datation K-Ar

Le noyau du potassium ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$ se transforme selon deux modes principaux de désintégration nucléaire ayant lieu simultanément et modélisés par les équations suivantes :

$${}^{40}_{19}\mathrm{K} \rightarrow {}^{40}_{20}\mathrm{Ca} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + {}^{0}_{0}\tilde{\upsilon}_e \text{ (antineutrino)}$$

de constante de vitesse k_1 et de temps de demi-vie $T_1 = 1{,}40.10^9$ années ;

$${}^{40}_{19}\mathrm{K} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} \rightarrow {}^{40}_{18}\mathrm{Ar} + {}^{0}_{0}\upsilon_e \text{ (neutrino)}$$

de constante de vitesse k_2 et de temps de demi-vie $T_2 = 11{,}9.10^9$ années.

On rappelle que :

- la période radioactive ou temps de « demi-vie » T_i est la durée au terme de laquelle la population initiale de nucléides a été divisée par deux ;
- l'ordre d'une transformation nucléaire vaut 1.

Le potassium ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$ est présent dans les laves volcaniques en fusion. Sous l'effet de la chaleur, la roche fond, devient de la lave et libère alors l'argon. En refroidissant, la lave se solidifie à la date $t = 0$. Elle contient alors du potassium ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$ mais pas d'argon. Le dosage par spectrométrie de masse, à une date t, des quantités d'argon et de potassium ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$ emprisonnées dans le réseau cristallin des laves solidifiées permet alors de dater ce type de roches.

On note :

- $P_K(t)$ et $P_{Ar}(t)$, le nombre de nucléides présents dans les roches issues de laves solidifiées, respectivement en potassium ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$ et argon à la date t ;
- $P_K(0)$ est le nombre de nucléides ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$ à la date $t = 0$ de solidification de la roche.

On établit la relation (**1**) en ne tenant compte que des deux principaux modes de désintégration nucléaire du noyau de potassium ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$:

$$P_K(0) = P_K(t) + \frac{k_1 + k_2}{k_2} P_{Ar}(t) \qquad \text{relation } (\mathbf{1}).$$

En supposant que le rapport $\frac{k_1 + k_2}{k_2} \times \frac{P_{Ar}(t)}{P_K(t)}$ est suffisamment faible devant 1, on établit la relation (**2**) permettant de dater un échantillon de roche :

$$t \approx \frac{1}{k_2} \frac{P_{Ar}(t)}{P_K(t)} \qquad \text{relation } (\mathbf{2}).$$

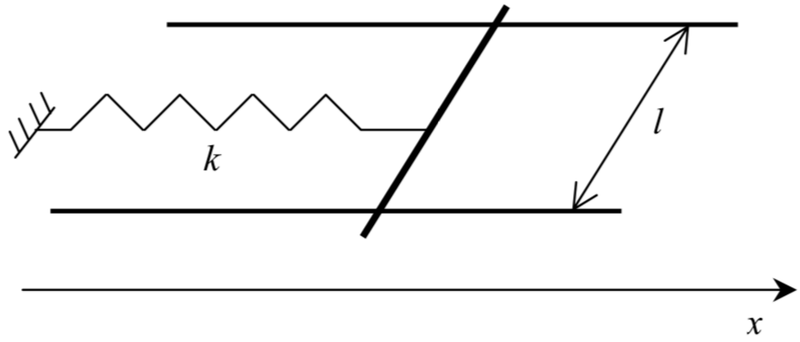
L'analyse par spectrométrie de masse des cendres volcaniques provenant de Okote en Ethiopie a donné $8{,}6.10^{16}$ atomes de potassium ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$ et $8{,}3.10^{12}$ atomes d'argon ${}^{40}_{18}\mathrm{Ar}$ par gramme de cendre.

Extraits de l'article *La méthode de datation potassium-argon* (*Planète Terre,* octobre 2003)
http://planet-terre.ens-lyon.fr/article/datation-k-ar.xml

Problème 2: Oscillation d'une barre sur des rails (Extrait concours ATS 2006)

A- Une barre de masse m peut glisser sans frottements sur deux rails parallèles. Les deux rails et la barre forment un plan horizontal. Les seuls mouvements possibles de la barre sont des translations rectilignes parallèlement à la direction des rails notée Ox. La barre est liée à un ressort de raideur k. L'origine des abscisses est choisie lorsque le ressort est au repos.

On pose $\omega_0^2 = k/m$. À l'instant initial, on lâche la barre sans vitesse initiale à l'abscisse $x = a$ avec $a > 0$.



1.1 Déterminer l'équation différentielle du mouvement par l'application du principe fondamental de la dynamique.
1.2 Déterminer l'expression de l'abscisse de la barre en fonction du temps.
1.3 Déterminer l'expression de l'énergie mécanique en fonction du temps.
1.4 Montrer, qu'en moyenne sur une période, l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle.

B- On reprend le problème précédent mais, cette fois, on suppose que la barre subit une force de frottements visqueux $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la barre et α un coefficient positif. On pose $\omega_0^2 = k/m$ et $2\lambda = \alpha/m$.

1.5 Établir l'équation différentielle du mouvement.
1.6 On suppose $\lambda \ll \omega_0$. Déterminer l'expression de l'abscisse x de la barre en fonction du temps t.
1.7 Représenter l'allure du graphe de x en fonction de t.
1.8 La condition précédente étant toujours vérifiée, montrer que l'énergie mécanique moyenne sur une pseudo-période peut se mettre sous la forme approchée :

$$E_M = \frac{1}{2}ka^2 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

On donnera l'expression de τ.