Mécanique, électrocinétique

Extrait de l'entête des sujets de la banque PT : « La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. »

Problème 1 : Circuit RLC, résonance (Extrait Concours Centrale-Supélec TSI, 2003)

I.A - Résonance série

Le dipôle de la figure 1 (une bobine d'inductance L et de résistance R est montée en série avec un condensateur de capacité C), alimenté par une tension sinusoïdale

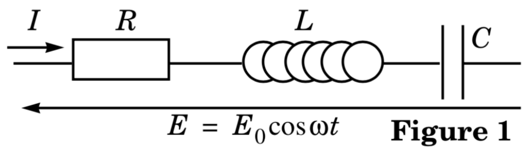


Figure 1

$$E = E_0 \cos \omega t$$

de pulsation ω variable, est parcouru par un courant

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) .$$

I.A.1) Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_s}$ de ce dipôle.

I.A.2) En déduire l'impédance (réelle) $\overline{Z_s}$ de ce dipôle et le retard de phase φ du courant I sur la tension E en fonction de la pulsation propre

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et du facteur de qualité

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

de ce circuit.

I.A.3) Tracer le graphe du rapport

$$\frac{Z_s}{R}$$

en fonction du rapport

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} .$$

I.A.4) Quelle est la valeur maximale $I_{0\mathrm{Max}}$ de l'amplitude I_0 du courant ? Pour quelle valeur de la pulsation est-elle atteinte ?

Tracer les graphes du rapport

$$\frac{I_0}{I_{0\mathrm{Max}}}$$

et de la phase φ en fonction de x.

I.A.5) L'acuité de la résonance est définie par le rapport

$$A = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \text{ où } \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \text{ (avec } \omega_2 > \omega_1 \text{)}$$

représente la bande de pulsations dans laquelle l'amplitude du courant vérifie

$$I_0(\omega) \geq \frac{I_{0\,\mathrm{Max}}}{\sqrt{2}} .$$

Déterminer A en fonction de Q. Dans quel domaine varie la phase φ pour $\omega \in [\omega_2, \omega_1]$?

I.B - Résonance parallèle

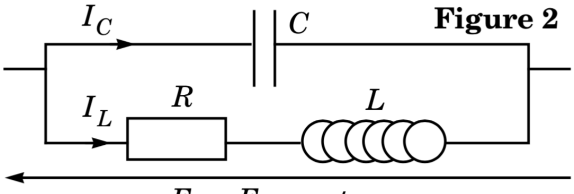


Figure 2

On considère maintenant le dipôle de la figure 2 (la bobine L, R est montée en dérivation avec le condensateur C), alimenté par la tension sinusoïdale $E = E_0 \cos\omega t$ de pulsation ω variable.

I.B.1) Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z_P}$ de ce dipôle en fonction de R, L, C et ω.

I.B.2) En déduire l'expression $\underline{Z_P}$ en fonction de R, C, ω, Q, ω_0 et $\underline{Z_s}$ (Q, ω_0 et $\underline{Z_s}$ ayant été définis à la question précédente).

I.B.3) Montrer que, lorsque le facteur de qualité est très élevé ($Q \gg 1$) et la pulsation ω pas trop faible

$$\left(Q\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1\right),$$

$\underline{Z_P}$ peut se mettre sous la forme approchée :

$$\underline{Z_P} \approx \frac{Q^2 R^2}{\underline{Z_s}}.$$

On utilisera ce résultat dans toute la suite de la question I.B.

I.B.4) Quelle est la valeur de $\underline{Z_P}$ pour la pulsation ω_0 ? Quel est alors le comportement de ce circuit ?

I.B.5) On suppose $\omega = \omega_0$. Déterminer les valeurs approximatives des intensités réelles I_L et I_C qui traversent respectivement la bobine et le condensateur en fonction de R, Q, ω, du temps t et de l'amplitude E_0 de la tension d'alimentation du dipôle. Commenter les résultats obtenus.

Problème 2: Approche énergétique du pendule pesant

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène de masse m et longueur ℓ en pivot parfait autour de l'axe Ox. Sa position est repérée par l'angle θ (*voir* Fig. 8). Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Ox est $J_{Ox} = \frac{1}{3} m\ell^2$.

1. Évaluer l'énergie cinétique de la tige à un instant quelconque.

2. Faire de même avec son énergie potentielle de pesanteur.

3. Quelles sont les actions extérieures subies par la tige ? Calculer leur puissance.

4. En déduire les positions d'équilibre et leur stabilité.

5. Trouver une intégrale première du mouvement. En déduire l'équation du mouvement de la tige.

6. La résoudre dans le cadre des petites oscillations sachant qu'initialement la tige est dans la position verticale $\theta = 0$, avec une vitesse angulaire $\omega_0 > 0$. Donner une condition sur ω_0 pour être effectivement dans cette approximation.

7. On ne se place plus forcément dans le cadre des petites oscillations. En faisant une étude énergétique, montrer que suivant les valeurs de ω_0 deux types de mouvement sont possibles. Les décrire. Quelle valeur de ω_0, notée ω_c, est à la limite des deux situations ?

<u>Note</u>: On prendra $E_p\left(m\vec{g}\right) = 0$ pour $\theta = 0$

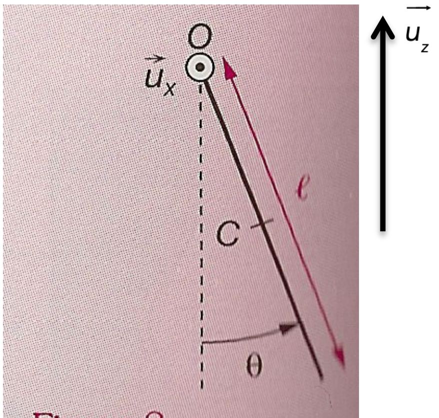
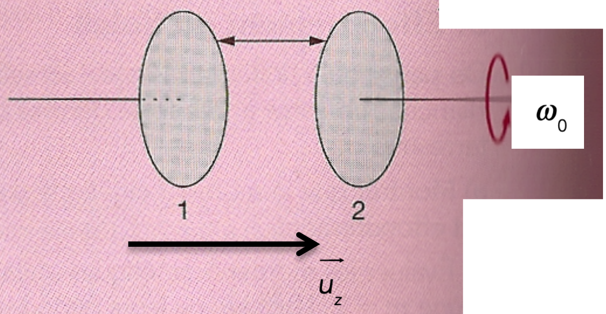


Figure 8

Problème 3: Entraînement par frottement

On considère le système de deux disques en rotation de la figure 21. Les deux disques (de moments d'inertie J_1 et J_2) sont en liaison pivot parfaite sur l'axe de rotation $\vec{u}_z$. Le second disque a une vitesse angulaire initiale ω_0, alors que le premier est immobile. On translate lentement les disques le long de l'axe jusqu'à ce qu'ils rentrent en contact.



a) En utilisant le théorème du moment cinétique scalaire, calculer les vitesses angulaires finales des deux disques. Comment l'intensité des frottements intervient-elle ?

b) Faire un bilan d'énergie pour chaque disque séparément.

c) Faire un bilan d'énergie pour le système total.

d) Commenter les résultats.