

Mécanique, Thermodynamique

Extrait de l'entête des sujets de la banque PT : « La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. »

Problème 1 : Etude du moteur Stirling (Extrait ATS, 2011)

On considère $n = 40$ mmol d'hélium, assimilable à un gaz parfait de coefficient isentropique constant $\gamma = C_p / C_v = 1,66$, subissant un cycle modélisé par les évolutions suivantes à partir de l'état A de volume $V_A = 1$ L :

- Compression isotherme réversible au contact de la source $\mathcal{S}_f$, jusqu'à l'état B , de volume $V_B = V_A / 4$;
- Échauffement isochore au contact thermique de la source $\mathcal{S}_c$ jusqu'à l'état C ;
- Détente isotherme réversible au contact de la source $\mathcal{S}_c$ jusqu'à l'état D , de volume V_A ;
- Refroidissement isochore au contact thermique de la source $\mathcal{S}_f$ jusqu'à l'état A .

La source chaude $\mathcal{S}_c$ est maintenue à température constante $T_c = 930$ K par un brûleur alimenté en méthane et en air.

La source froide $\mathcal{S}_f$ est maintenue à température constante $T_f = 330$ K, en régime permanent de fonctionnement, par le retour d'eau froide des circuits de chauffage.

III.1. Calculer les valeurs numériques de pression et de volume dans chacun des états. On présentera les résultats dans un tableau.

III.2. Représenter l'allure du cycle en coordonnées de Clapeyron (P, V).

III.3. Le cycle est-il moteur ou récepteur ? Justifier.

III.4. On rappelle la relation de Mayer : $C_p - C_v = nR$. Exprimer C_p et C_v en fonction de n , R et γ .

III.5. Déterminer pour la transformation $A \rightarrow B$ l'expression du travail W_{AB} et du transfert thermique Q_{AB} reçus par le fluide en fonction de n , R et T_f . Commenter le signe de W_{AB} .

III.6. Déterminer pour la transformation $B \rightarrow C$ l'expression du travail W_{BC} et du transfert thermique Q_{BC} reçus par le fluide en fonction de n , R , γ , T_f et T_c . Commenter le signe de Q_{BC} .

III.7. En déduire l'expression de l'entropie échangée $\mathcal{S}_e$ par le fluide au cours de la transformation $B \rightarrow C$.

III.8. Déterminer l'expression de la variation d'entropie du fluide ΔS_{BC} .

III.9. Calculer numériquement $\mathcal{S}_e$ et ΔS_{BC} . La transformation $B \rightarrow C$ est-elle réversible ?

III.10. Déterminer pour la transformation $C \rightarrow D$ l'expression du travail W_{CD} et du transfert thermique Q_{CD} reçus par le fluide.

III.11. Déterminer pour la transformation $D \rightarrow A$ l'expression du travail W_{DA} et du transfert thermique Q_{DA} reçus par le fluide.

III.12. Exprimer le travail total W_t fourni par le moteur au cours d'un cycle, en fonction de n , R , T_f et T_c .

III.13. Le moteur produit du travail à partir de l'énergie thermique reçue au cours de la détente isotherme $C \rightarrow D$. Exprimer le rendement du moteur η_m uniquement en fonction de T_f et T_c et calculer sa valeur.

III.14. Calculer le travail total W_t fourni par le moteur au cours d'un cycle. Combien de cycles par seconde doit effectuer le moteur pour fournir une puissance $\mathcal{P}$ de 2 kW ?

Problème 2: Etude d'un satellite de télédétection terrestre (Extrait ATS, 2014)

La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et en cartographie. Nous étudions dans ce sujet un satellite de télédétection en orbite autour de la Terre.

La première partie consiste en l'étude du mouvement du satellite. La deuxième aborde l'instrumentation optique embarquée pour l'observation. Enfin, la troisième partie est consacrée à l'étude du refroidissement du capteur optique embarqué.

Les trois parties sont indépendantes. La calculatrice étant interdite, le candidat pourra être amené lors des applications numériques à procéder à des simplifications lorsqu'un terme d'une équation est négligeable devant les autres termes.

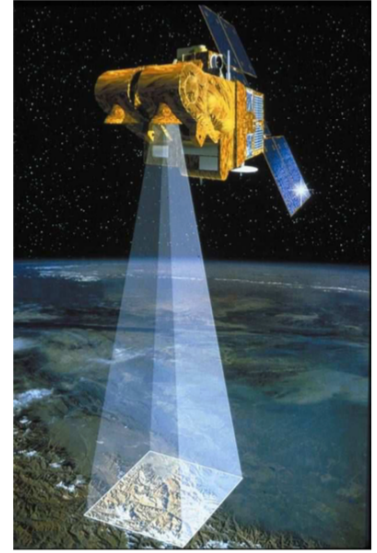


Figure 1 - Principe d'un satellite de télédétection (source : opticsvalley)

1 Étude du mouvement du satellite

On étudie dans cette partie le mouvement du satellite, assimilé à un point matériel M , autour de la Terre de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km et de centre O .

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen au cours du temps noté t . L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindro-polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. On suppose que la trajectoire du satellite de masse $m = 4,0 \cdot 10^3$ kg est plane et se fait dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représenté sur la figure 2.

On rappelle que $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$ où $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

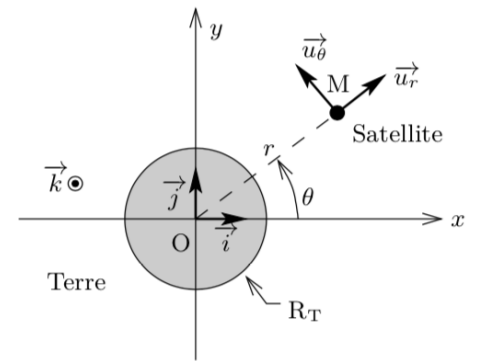


Figure 2

1.1 Préliminaires

1) La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées $(r(t), \theta(t), z = 0)$. Déterminer l'expression du vecteur position $\vec{OM}$ et du vecteur vitesse $\vec{v}_M$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ en fonction de r , θ et de leurs dérivées éventuelles.

2) On note $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$ la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. L'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ associée à l'interaction gravitationnelle $\vec{F}$ s'exprime sous la forme $\mathcal{E}_p(r) = -g_0 m \frac{R_T^2}{r}$. En déduire l'expression de l'interaction $\vec{F}$ exercée par la Terre sur le satellite en fonction de g_0 , m , R_T et r . L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive? Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à $\vec{F}$.

3) Soit $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v}_M$. Comment s'appelle cette grandeur mécanique associée au satellite? Déterminer son expression dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, puis sa norme L_0 en fonction de r , $\dot{\theta}$ et m . Montrer que le vecteur $\vec{L}_0$ est constant au cours du mouvement.

1.2 Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

- ★ phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
- ★ phase de satellisation : la satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

- 4) Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse $\vec{v}_M$ et le vecteur accélération $\vec{a}_M$ du satellite uniquement en fonction de la quantité $v = r\dot{\theta}$, de sa dérivée temporelle $\dot{v}$ et de r .
- 5) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que le mouvement est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0 , R_T et r .
- 6) En déduire l'expression des énergies cinétique $\mathcal{E}_c$ et mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite en fonction de m , g_0 , R_T et r . Justifier le signe de $\mathcal{E}_m$.
- 7) Application numérique : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km, puis pour un rayon $r_h = 40 \cdot 10^3$ km. Rappel : $64 = 2^6$.

1.3 Étude énergétique du satellite

On suppose ici que la trajectoire du satellite n'est pas nécessairement circulaire.

- 8) Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et qu'elle se met sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0m\frac{R_T^2}{r}.$$

- 9) On appelle énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \mathcal{E}_m - \frac{1}{2}m\dot{r}^2.$$

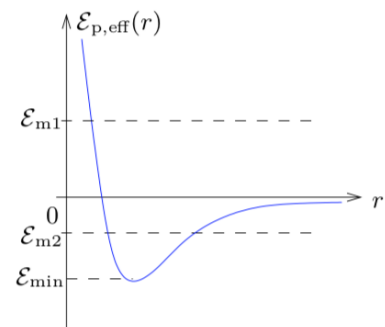


Figure 3 - Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

Au cours du mouvement, les valeurs du rayon r sont données par l'inégalité $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_m$. Expliquer ce résultat.

- 10) Le graphe de $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ pour une valeur donnée de L_0 est représenté figure 3. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

a) À quelle énergie $\mathcal{E}_{m1}$ ou $\mathcal{E}_{m2}$ peut correspondre une trajectoire elliptique ? une trajectoire hyperbolique ?

b) Pour quelle valeur particulière de $\mathcal{E}_m$ la trajectoire est-elle circulaire ?