Problème 1 : De la Terre à la Lune : Programme Apollo, 15 ans d'aventure spatiale (extrait Concours Centrale-Supélec, TSI, 2012)

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'Homme de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969. La première partie étudie le départ de la Terre, la seconde l'arrivée sur la Lune. La troisième étudie l'écoulement des gaz dans la tuyère d'un des cinq moteurs-fusées du premier étage de la fusée.

I De la Terre ...

La fusée lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.

I.A – Décollage

I.A.1) Choix du référentiel

a) Définir les référentiels terrestre et géocentrique, notés respectivement $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{R}_G$.

b) Définir un référentiel galiléen.

Dans toute la suite, $\mathcal{R}_G$ *sera le référentiel d'étude, considéré comme galiléen.*

c) Justifier ce choix.

I.A.2) Influence de la base de lancement

La Terre, associée à une sphère de rayon $R_T = 6{,}38 \times 10^3$ km, est animée d'un mouvement de rotation uniforme (**figure 1**) autour de l'axe Sud-Nord Tz, à la vitesse angulaire $\Omega = 7{,}29 \times 10^{-5}$ rad · s^{-1}.

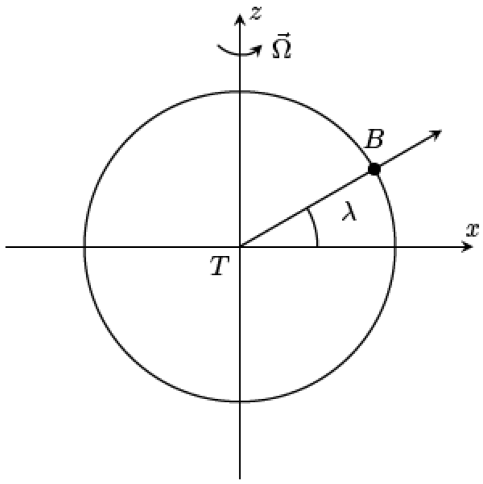

Figure 1 Latitude

a) Donner la nature de la trajectoire d'un point B à la surface de la Terre, situé à la latitude λ.

b) Établir l'expression du module v_B de sa vitesse.

c) Application numérique : Calculer v_{B1} pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-unis ($\lambda_1 = 28,5$ °) et v_{B2} pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,2$ °).

Une fusée de masse m_F décolle du point B, sans vitesse initiale par rapport à la Terre, pour atteindre une orbite circulaire autour de la Terre avec la vitesse finale v_0 par rapport à $\mathcal{R}_G$.

d) Déterminer l'expression de la variation d'énergie cinétique ΔE_c de la fusée, en fonction de v_B, v_0 et m_F.

e) Calculer numériquement l'économie relative réalisée, définie par $\dfrac{\Delta E_{c1} - \Delta E_{c2}}{\Delta E_{c1}}$, en choisissant la base de Kourou plutôt que celle de Cap Canaveral, avec $v_0 = 8$ km · s^{-1}. Commenter.

f) Quel(s) autre(s) avantage(s) présente la base de Kourou ?

I.B.3) Mouvement d'un satellite

Un satellite de masse m_F est en orbite autour de la Terre à la distance r de son centre.

a) Donner l'expression de l'énergie potentielle E_{p0} associée, en la choisissant nulle pour $r \to \infty$.

b) Montrer que la trajectoire est plane. Quelle est sa nature ?

La trajectoire est maintenant considérée circulaire.

c) Exprimer la vitesse v_0 de la fusée, ainsi que son énergie cinétique E_{c0}, en fonction de $\mathcal{G}$, m_F, m_T et r.

d) Exprimer le rapport $\dfrac{T_0^2}{r^3}$, où T représente la période de révolution du satellite, en fonction de $\mathcal{G}$ et m_T.

Quel est le nom de cette loi ? Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a, demi-grand axe de l'ellipse.

e) Application numérique : calculer v_0 et T_0 pour une orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$) .

f) Donner enfin l'expression de l'énergie mécanique de la fusée sous la forme $E_{m0} = -\dfrac{K}{2r}$, en précisant la valeur de K. Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a, demi-grand axe de l'ellipse.

Données : $G \times m_T = 4{,}0 \times 10^{14}$ m^3.s^{-2} avec m_T la masse de la Terre et G la constante universelle de gravitation.

II ... à la Lune.

II.A – Objectif Lune

II.A.1) Orbite de transfert

La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1, de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où d_{TL} représente la distance Terre-Lune (Figure 2).

Figure 2 Orbite de transfert

a) Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire.

b) En déduire l'expression de la vitesse v_1. Application numérique.

c) Où est placée la Terre par rapport à cette ellipse ? À quel instant doit-on allumer les moteurs ?

d) Évaluer numériquement la durée t_1 du transfert Terre-Lune (parcours de la moitié de l'ellipse). On donne $d_{TL} = 3{,}8 \times 10^8$ m.

II.A.2) Orbite lunaire

Au voisinage de la Lune, de rayon R_L et de masse m_L, l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable .

L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.

Les paramètres du vol sont calculés pour qu'en cas de panne des moteurs, la fusée contourne la Lune pour revenir sur la Terre. (Ce fut le cas lors de la mission Apollo XIII). À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.

a) Faut-il freiner ou accélérer ? Justifier qualitativement.

b) Déterminer numériquement v_2, vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune, avec $\mathcal{G} \times m_L = 4{,}9 \times 10^{12}$ m$^3 \cdot$ s^{-2} et $R_L = 1{,}74 \times 10^3$ km.

Problème 2 : Transformation irréversible (extrait Concours CCP, TSI, 2004)

1. Questions de cours

1.1. Donner la définition d'un système fermé.
Pour un système thermodynamique fermé, énoncer le second principe de la thermodynamique. On rappellera notamment le bilan entropique liant la variation d'entropie ΔS du système fermé à l'entropie reçue S^r et la production d'entropie S^p.
Toute équation devra être accompagnée d'une explication.

1.2. Bilans entropiques particuliers

1.2.1. Donner la définition d'un système isolé.
Que devient le bilan entropique du 1.1. dans le cas d'un système isolé ?

1.2.2. Donner la définition d'un système stationnaire.
Que devient le bilan entropique dans le cas d'un système stationnaire ?

1.3. Donner deux exemples de causes d'irréversibilité.

1.4. Dans les questions suivantes, on notera n la quantité de matière de gaz parfait, R la constante des gaz parfaits, C_p la capacité thermique à pression constante des n moles de gaz, C_v la capacité thermique à volume constant des n moles de gaz, et γ le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants. On supposera que C_v et C_p sont indépendants de la température T. On s'attachera à soigner les explications.

1.4.1. Exprimer la variation d'énergie interne d'un gaz parfait en fonction de la variation de la température.

1.4.2. Exprimer la variation d'entropie d'un gaz parfait en fonction des variations de température et de volume.

1.4.3. Dans le cas d'un gaz parfait, donner la relation entre C_p, C_v, R et n. Quel est le nom donné à cette relation ?

1.4.4. Exprimer C_p et C_v en fonction de n, R et γ.

2. Compression d'un gaz parfait

Un cylindre circulaire d'axe vertical et de section S est fermé par un piston de masse M. Pour traiter l'aspect thermodynamique de ce problème, on négligera les frottements du piston sur le cylindre (NB : ces frottements existent néanmoins et permettent d'atteindre l'état d'équilibre mécanique). On introduit dans le cylindre à température ambiante T une quantité d'azote n telle que le plan inférieur du piston soit, à l'équilibre, à une distance a_1 du fond *(fig.1)*.
On notera P_0 la pression atmosphérique et on assimilera l'azote à un gaz parfait diatomique.

2.1. En étudiant l'équilibre du piston, donner l'expression de la pression P_1 à l'intérieur du cylindre en fonction de P_0, M, S, et l'accélération de la pesanteur g.

On ajoute dorénavant une surcharge de masse m sur le piston *(fig.2)*.

2.2. On suppose dans cette question que le nouvel équilibre mécanique est atteint avant que tout échange de chaleur n'ait eu lieu avec l'extérieur.

2.2.1. Exprimer la pression P_2 dans le cylindre en fonction de P_0, M, m, S et g.

2.2.2. Déterminer le travail des forces de pression atmosphérique exercées sur le piston et transmises intégralement au gaz en fonction de P_0 et de la variation de volume du gaz dans le cylindre.

2.2.3. Déterminer le travail de pesanteur de l'ensemble {piston + surcharge} en fonction de M, m, S et g et de la variation de volume du gaz dans le cylindre.

2.2.4. En appelant T_2 la température juste après l'équilibre mécanique et avant tout échange thermique, appliquer le premier principe de la thermodynamique au système fermé du gaz parfait et exprimer la nouvelle hauteur du piston a_2 en fonction de a_1, C_v, T_2, T, P_2 et S.

2.2.5. En déduire alors a_2 en fonction de a_1, γ, P_1 et P_2.

2.3. On suppose maintenant que l'équilibre thermique s'est établi avec l'extérieur.
Exprimer la pression P_3 à l'intérieur du cylindre en fonction de P_0, M, m, S et g.
Exprimer ensuite la nouvelle position d'équilibre du piston a_3 en fonction de a_1, P_1 et P_3, puis en fonction de a_1, P_0, M, m, S et g.

2.4. Quelle est la relation entre la quantité de chaleur Q et le travail W mis en jeu lors de l'ensemble de la transformation subie par le gaz ?
Donner l'expression du travail W. En déduire l'expression de la quantité de chaleur Q en fonction de P_3, a_3, a_1 et S, puis en fonction de n, R, T, P_0, M, m, S et g, toujours sur l'ensemble de la transformation.

2.5. On souhaite ici calculer les variations d'entropie sur l'ensemble de la transformation.

2.5.1. L'atmosphère extérieure ayant en permanence une température égale à T, quel nom peut-on lui donner ? En déduire l'expression de l'entropie reçue par l'extérieur. Exprimer la variation d'entropie de l'extérieur ΔS_{ext} en fonction de n, R, M, m, g, P_0 et S.

2.5.2. Quelle est l'entropie reçue par le gaz parfait dans le cylindre ? En utilisant la question 1.4.2, exprimer la variation d'entropie totale du gaz parfait dans le cylindre ΔS_{gaz} en fonction de n, R, M, m, g, P_0 et S.

2.5.3. En déduire la variation d'entropie de l'univers $\Delta S = \Delta S_{gaz} + \Delta S_{ext}$.
En posant $x(m) = \dfrac{mg}{Mg + P_0 S}$, montrer que $\Delta S = nR\left(x - \ln(1 + x)\right)$.

2.5.4. La transformation est-elle réversible ? Justifier la réponse.