

Electrocinétique (filtre), mécanique

Extrait de l'entête des sujets de la banque PT :

« La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. »

Problème 1: Exemple de dynamique stellaire et galactique (Extrait centrale-Supélec TSI)**Données numériques :**

Constante de gravitation	$G = 6,7 \times 10^{-11}$ unité du syst. international (S.I.)
Masse du soleil	$M_s = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$
Rayon du soleil	$R_s = 7 \times 10^8 \text{ m}$
Masse de la terre	$m_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon de la terre	$R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$
Accélération de la pesanteur au niveau du sol	$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Distance moyenne terre-soleil	$d = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Année-lumière (notée al)	$1 \text{ al} \approx 10^{16} \text{ m}$

Partie I -**I.A - Préliminaire**

On considère le mouvement circulaire d'une planète, de masse m , en orbite à la distance r du soleil sous la seule action de la force gravitationnelle du soleil.

I.A.1) Exprimer cette force gravitationnelle en fonction de G , M_s , m et r . En déduire la dimension physique de la constante G en fonction des seules unités de base du système S.I.

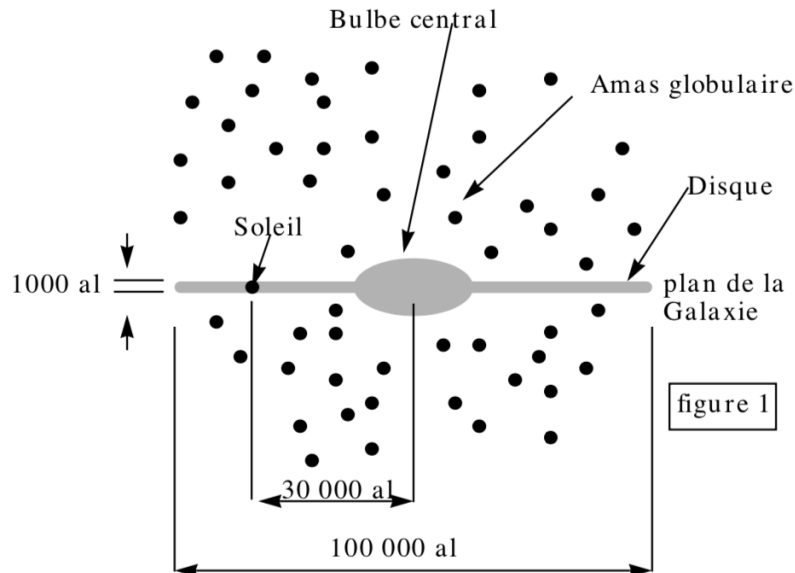
I.A.2) Établir une relation liant la période orbitale T du mouvement de la planète au rayon r et aux paramètres G et M_s . On obtient ainsi une expression simplifiée de la troisième loi dite de Kepler.

I.B - Application

Notre galaxie, dont la trace sur le ciel nocturne est appelée "voie lactée", est un système formé d'un grand nombre d'étoiles animées autour de leur centre de masse commun de mouvements orbitaux supposés analogues à ceux des planètes autour du soleil. La figure 1 représente le schéma de notre galaxie vue en

coupe avec ses trois parties caractéristiques : bulbe central, disque, halo sphérique d'amas d'étoiles (appelé amas globulaire). Le soleil est localisé au niveau du disque galactique, à une distance $D \approx 30\,000$ al du coeur de la galaxie ; il décrit autour du noyau galactique une orbite circulaire en une période $T_s = 250 \times 10^6$ années soit $T_s = 7,88 \times 10^{15}$ s.

On supposera que toutes les masses confinées à l'intérieur d'une sphère de rayon D agissent comme si elles se trouvaient au centre de la galaxie.



I.B.1) Donner une estimation grossière de la masse M de la galaxie, en kilogrammes, puis en unités de masse solaire M_s .

I.B.2) Comparer le nombre M/M_s à l'évaluation $N = 6 \times 10^{11}$ déduite par les astronomes à partir d'études de rotation de notre galaxie. Interpréter simplement l'écart entre ces deux valeurs.

I.B.3) En admettant que la masse moyenne d'une étoile est de l'ordre de la masse du soleil M_s , donner, pour l'ensemble de la galaxie (bulbe central, disque, halo sphérique : figure 1) l'ordre de grandeur de la densité d'étoiles, exprimée en nombre n_0 d'étoiles par année-lumière.

I.D - Vitesse de libération

I.D.1) Exprimer l'énergie totale initiale E_0 d'un satellite artificiel de masse m lancé avec une vitesse v_0 à partir de la surface d'une planète (à symétrie sphérique) de rayon R et de masse M . Exprimer de même l'énergie totale E du satellite en un point quelconque en fonction de la distance r de ce point au centre de la planète et de la vitesse v du satellite en ce point.

I.D.2) En déduire, en l'absence de frottement, la vitesse minimale v_l , appelée vitesse de libération, qui doit être "initialement" communiquée au satellite pour qu'il puisse s'éloigner indéfiniment de la planète. On exprimera v_l en fonction de G , M et R .

I.D.3) Application numérique :

- Cas d'un satellite terrestre : exprimer la vitesse de libération de v_{IT} en fonction du rayon terrestre R_T et de l'accélération de la pesanteur g au niveau du sol. Faire l'application numérique. Pourrait-on communiquer une telle vitesse à un satellite au niveau du sol ?
- Cas d'une particule au voisinage du soleil : déterminer la valeur numérique de "la vitesse de libération" v_{IS} d'un ion produit à la surface du soleil.

I.D.4) Dans le cas du soleil, exprimer la vitesse de libération v_{IS} en fonction de la constante de gravitation G , du rayon R_S du soleil et de la masse volumique moyenne ρ_S du soleil. Quelle indication peut-on en déduire pour d'autres étoiles de structure interne comparable ?

I.E - Étoile de Laplace

En 1798, dans "Exposition du Système du Monde", Laplace imagine un astre de même masse volumique moyenne que la terre, soit ρ_T , et de diamètre égal à 250 fois celle du soleil. Quelle est la vitesse de libération correspondante à partir de la surface de l'astre ? Pourquoi Laplace conclut-il qu'un tel astre empêche la lumière de quitter sa surface, le rendant ainsi invisible ? Dans la terminologie actuelle, celle de la Relativité Générale, un tel "objet" est décrit comme un "trou noir".

I.F - Rayon de Schwarzschild

On admet qu'un corps de masse M agit comme un trou noir si son rayon R est inférieur à un certain rayon critique R_C appelé rayon de Schwarzschild, défini par une vitesse de libération à la surface de ce corps égale à la vitesse de la lumière dans le vide, soit $v_l = c$.

I.F.1) Exprimer R_C en fonction de G , M et c .

I.F.2) Application numérique : calculer le rayon de Schwarzschild R_C dans le cas du soleil, puis de la terre.

I.F.3) Exprimer la force gravitationnelle F_{TN} exercée par un trou noir sur un objet en fonction de la masse m de l'objet, de sa distance r au centre du trou noir, du rayon de Schwarzschild R_C du trou noir et de c .

Application numérique : calculer F_{TN} pour $R_C = 8,9 \text{ mm}$, $m = 3 \text{ kg}$, $r = 6000 \text{ km}$.

I.F.4) Calculer l'accélération de la pesanteur g_{TN} au niveau de la sphère de Schwarzschild en fonction R_C et c .

Application numérique : calculer g_{TN} pour $R_C = 8,9 \text{ mm}$.

I.F.5) On appelle "sphère des événements" la sphère de rayon R_C . Justifier qualitativement le choix de ce terme.

I.G - Application au cœur de notre galaxie

Des astronomes ont observé un petit objet massif au centre de notre galaxie. Un anneau de matière est en orbite circulaire autour de cet objet massif. L'anneau a un diamètre de 15 al et sa vitesse orbitale est voisine de $200 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

I.G.1) En supposant la masse de l'objet massif très supérieure à celle de l'anneau, déterminer la masse M_{OM} de cet objet massif, en kilogrammes, puis en unité de masse solaire (cf question I.A.2).

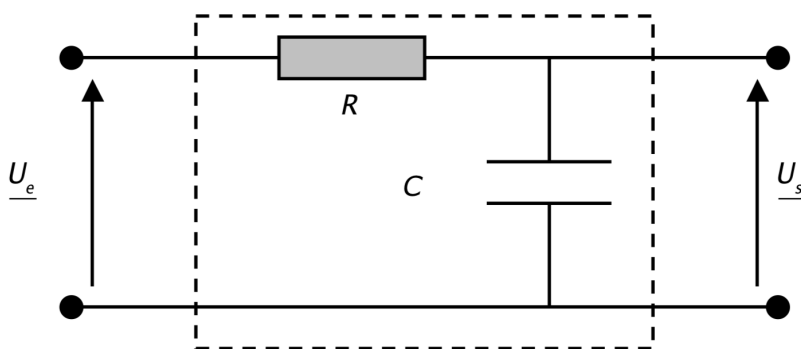
I.G.2) L'observation des étoiles, aussi bien que les théories modernes de leur structure, montrent qu'il est pratiquement impossible pour une étoile simple, d'avoir une masse supérieure à environ 50 masses solaires. L'objet massif précédent peut-il être une étoile ?

I.G.3) La plupart des astronomes pensent actuellement que l'objet massif situé au centre de notre galaxie, et dont la masse M_{OM} a été déterminée à la question I.G.1, est un trou noir. S'il en est ainsi, quel est son rayon de Schwarzschild R_C et comparer la valeur numérique ainsi obtenue à la distance moyenne d entre la terre et le soleil.

I.G.4) Un candidat privilégié au statut de trou noir est Cygnus X-1, ainsi nommée parce qu'elle fut la première source de rayons X découverte dans la constellation du Cygne. Or, Cygnus X-1 est un système binaire localisé à 8000 al de la terre. Les deux objets de ce système sont respectivement une étoile supergéante bleue, notée HDE226868 et un objet compact non directement "visible" identifié à un trou noir. La période orbitale de Cygnus X-1 est $T = 5,6$ jours. La masse de l'étoile supergéante HDE226868 est estimée à $m_1 = 30 M_s$ et celle du trou noir à $m_2 = 6 M_s$. En supposant les orbites circulaires, déterminer les valeurs numériques du rayon de l'orbite et la vitesse orbitale de chaque objet. Comparer ces résultats au rayon orbital d et à la vitesse orbitale v_T de la terre dans son mouvement autour du soleil.

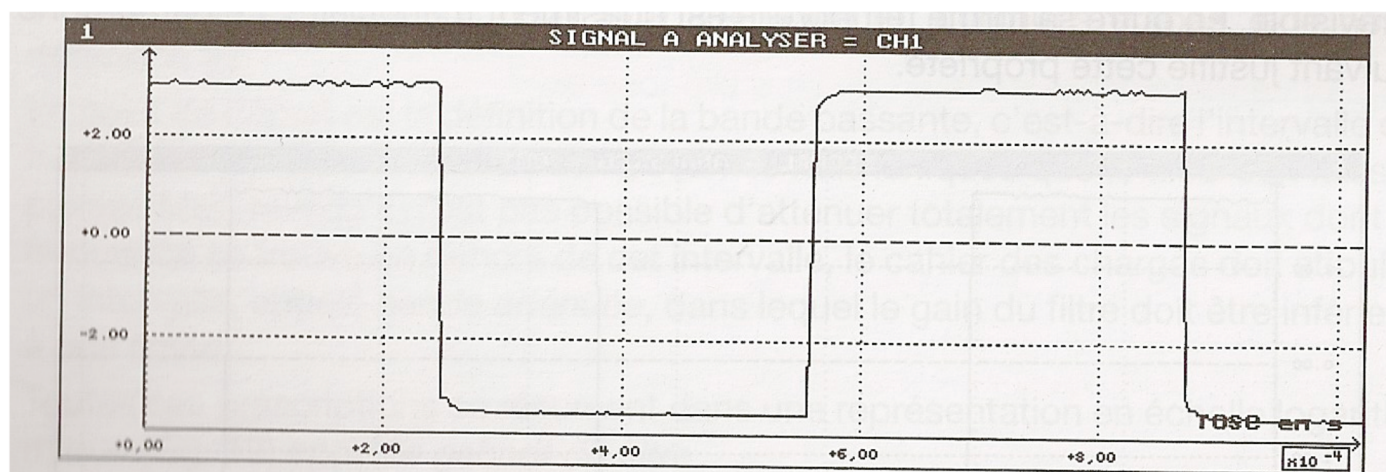
Problème 2 : Filtre

On considère le filtre suivant soumis en son entrée à une tension alternative:



- 1) Déterminer sa fonction de transfert. On fera apparaître une pulsation caractéristique ω_c .
- 2) Calculer le gain en décibel, la phase de cette fonction de transfert et dessiner les diagrammes de Bode correspondant. A quoi correspond la pulsation ω_c ? Quelle est la nature de ce filtre ?

3) On envoie à l'entrée du filtre le signal carré de la figure suivante. Déterminer la pulsation du fondamental notée ω_0 .



4) La figure ci-dessous représente le spectre du signal d'entrée précédent et le graphe du gain du filtre en fonction de la fréquence dans le cas où $\omega_0/\omega_c = 1/10$. Tracer, en justifiant, l'allure du signal de sortie.

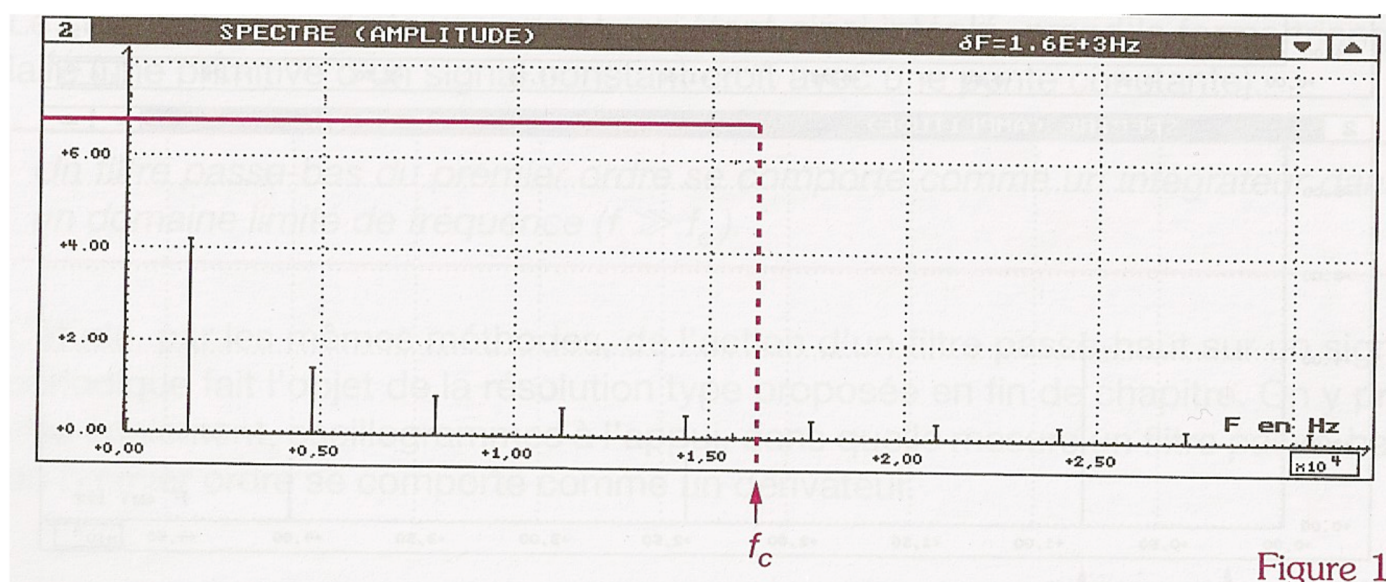
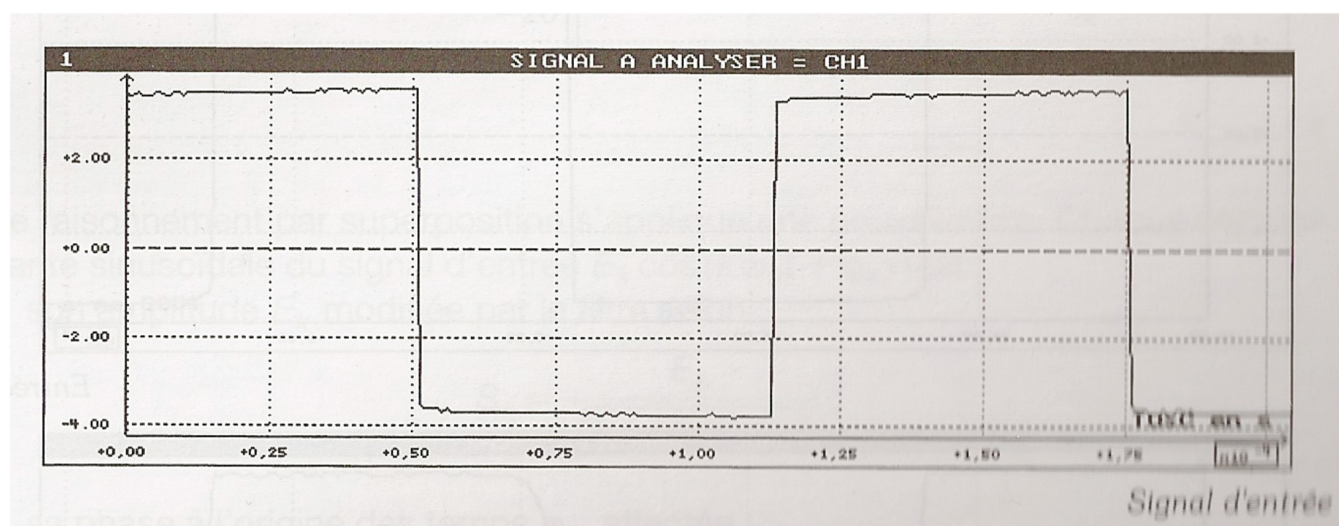
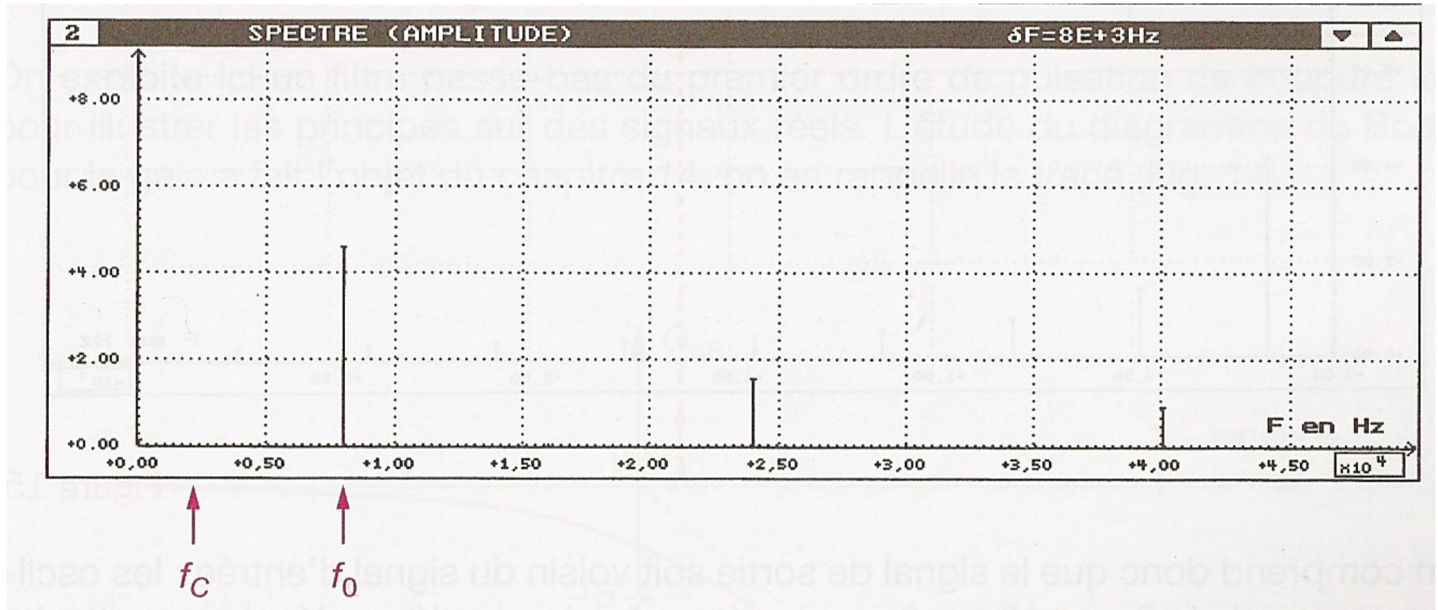


Figure 1.

5) On envoie à présent à l'entrée du filtre le signal carré de la figure suivante. Déterminer la pulsation du fondamental notée ω_0 .



6) La figure ci-dessous représente le spectre du signal d'entrée précédent dans le cas où $\omega_0 \gg \omega_c$.



- Dans ce cas, simplifier la fonction de transfert du filtre RC et tracer les diagrammes de Bode correspondant.
- Quelle opération mathématiques réalise alors le filtre ?
- A partir des résultats précédents, tracer, en justifiant, l'allure du signal de sortie.

Problème 3 : Questions ouvertes

a) On considère une sphère de masse M et de rayon r_0 qui roule sans glissement sur un plan incliné. On lâche la sphère d'une hauteur H sans vitesse initiale (figure 1). Que vaut la vitesse de la sphère en bas du plan incliné ? Comparer et discuter le résultat à celui obtenu pour un objet qui glisse sans frottement.

Pour une sphère qui tourne autour de son centre $J = \frac{2}{5}Mr_0^2$.

b) Deux cales sont positionnées aux extrémités d'une planche uniforme de masse M et de longueur ℓ_0 . Une personne, au repos et de masse m , se place sur la planche comme indiqué sur la figure 2 à une distance ℓ de la droite. Calculer la norme de chaque force qui s'exerce sur chaque cale pour que l'ensemble soit à l'équilibre.



Figure 1

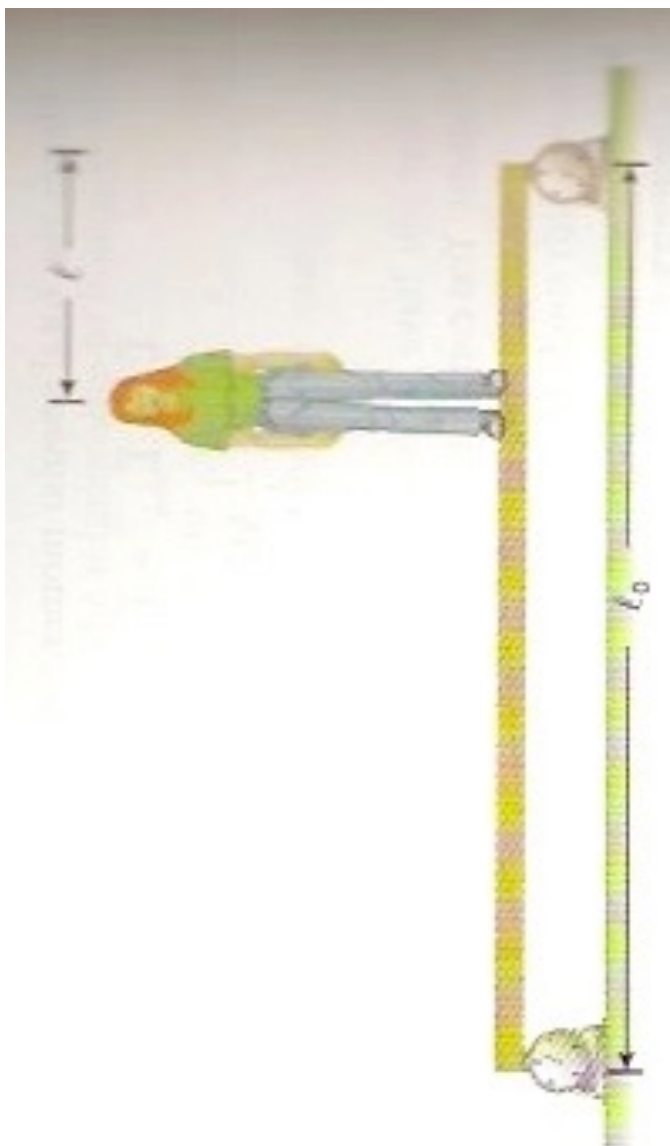


Figure 2