

**Thermodynamique, Particule dans un champ magnétique**

Extrait de l'entête des sujets de la banque PT :

« La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. »

**Problème 1 : Moteur Thermique**

Ce problème illustre le **fonctionnement d'un moteur automobile** et comporte quatre volets indépendants : analyse thermodynamique du moteur automobile (première partie), pétrochimie et carburants (seconde partie), étude de l'allumage commandé du moteur à essence (troisième partie) et contrôle des gaz d'échappement (quatrième partie).

Remarques préliminaires importantes : il est rappelé aux candidat(e)s que :

- les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les calculs.
- les résultats exprimés sans unité ne seront pas comptabilisés.
- dans tous les calculs, les gaz sont assimilés à des gaz parfaits (leurs pressions partielles sont notées en caractères italiques). Seront utilisés les indices suivants : (l) pour un liquide et (g) pour un gaz. On notera  $\ln$ , le logarithme népérien et  $\log$ , le logarithme décimal.
- les données numériques générales sont répertoriées à la fin de la seconde partie du problème.

Les moteurs sont classés en deux catégories suivant la technique d'inflammation du mélange {air-carburant} : les moteurs à allumage commandé (moteurs à essence) et les moteurs à allumage par compression (moteurs Diesel). Ce sont tous deux des moteurs à combustion interne car la combustion s'effectue à l'intérieur du moteur.

Dans le cas des moteurs à allumage commandé, un mélange convenable {air-essence} obtenu à l'aide d'un carburateur est admis dans la chambre de combustion du cylindre. L'allumage y est provoqué par une étincelle éclatant entre les deux électrodes d'une bougie.

**PREMIERE PARTIE :  
ÉTUDE THERMODYNAMIQUE DU MOTEUR AUTOMOBILE**

Le moteur comporte en général plusieurs cylindres. Dans chaque cylindre (figure 1), le piston entraîné par le vilebrequin permet de recevoir le travail mécanique des forces pressantes lors de la dilatation des gaz chauds produits par la combustion de l'essence. Il coulisse entre le **point mort haut** (PMH) où le volume  $V$  de la chambre de combustion est minimal  $V = V_{\min}$  et le **point mort bas** (PMB) où le volume de la chambre de combustion est maximal  $V = V_{\max}$ . Le volume ainsi balayé est appelé la cylindrée, il est noté  $C_V = V_{\max} - V_{\min} = 2000 \text{ cm}^3$ . Le mélange détonant {air-essence} est introduit dans le cylindre par l'intermédiaire d'une valve : la soupape d'admission. Les gaz de combustion sont évacués par une autre valve : la soupape d'échappement. L'ouverture et la fermeture des valves sont commandées par l'arbre à cames et les culbuteurs.

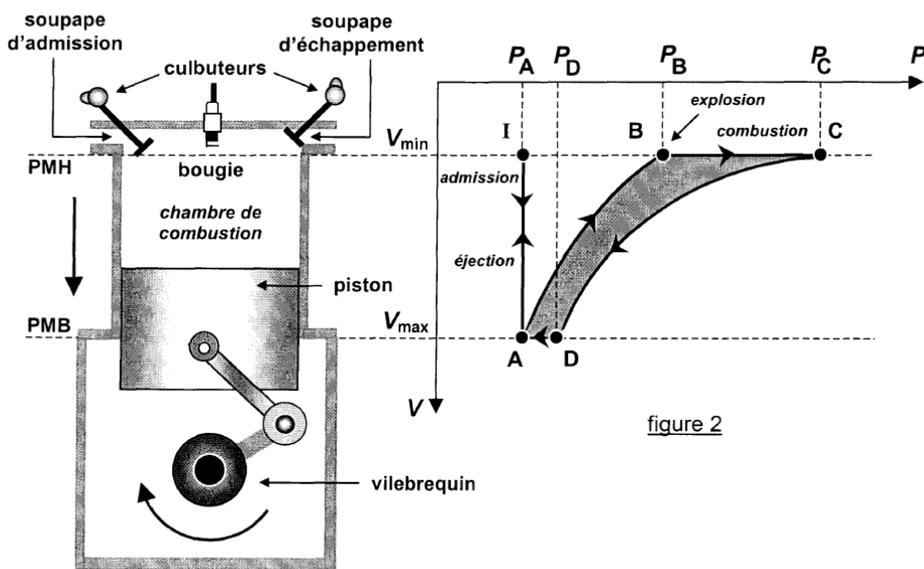


figure 1

figure 2

Le fonctionnement du moteur est **cyclique**. Il se décompose en **4 temps** successifs décrits comme suit :

**1<sup>er</sup> temps : l'admission.** La soupape d'admission s'ouvre ; le piston descend et aspire le mélange gazeux {air-essence} venant du carburateur.

**2<sup>ème</sup> temps : la compression.** Les soupapes d'admission et d'échappement sont fermées ; le piston, en remontant, comprime le mélange.

**3<sup>ème</sup> temps : la combustion et la détente.** Les soupapes sont encore fermées ; une étincelle jaillissant de la bougie provoque la combustion du mélange. La pression augmente brutalement, le piston est repoussé : ce temps est moteur.

**4<sup>ème</sup> temps : l'échappement.** Le piston remonte ; la soupape d'échappement s'ouvre. Les gaz brûlés sont éjectés.

A la fin du quatrième temps, le piston et les soupapes sont revenus dans leur position initiale.

Le fonctionnement du moteur est schématisé sur un diagramme de Watt ( $P, V$ ) où  $P$  est la pression du gaz contenu dans le volume  $V$  de la chambre du cylindre (*figure 2*). Les étapes successives du cycle sont décrites comme suit :

- [I → A] : admission du mélange gazeux {air-essence} dans la chambre de combustion à la température ambiante  $T_A = 300\text{ K}$  et sous la pression atmosphérique  $P_A = 1\text{ bar}$ ,
- [A → B] : compression adiabatique et réversible du mélange {air-essence} (les frottements du piston sur le cylindre sont négligés),
- [B → C] : en B, l'étincelle provoque l'explosion du mélange suivie d'une compression isochore,
- [C → D] : en C, fin de la combustion suivie d'une détente adiabatique et réversible du gaz brûlé,
- [D → A] : l'ouverture de la soupape d'échappement ramène le gaz brûlé à la pression atmosphérique,
- [A → I] : la remontée du piston évacue le gaz brûlé vers l'extérieur.

Le système fermé constitué du fluide gazeux décrit indéfiniment le cycle **ABCD** appelé **cycle Beau de Rochas** (brevet d'invention déposé en 1862, première mise en application sur monocylindre en 1876 par Otto). Dans cette approche idéalisée, le mélange initial {air-essence} et les gaz brûlés d'échappement sont assimilés à un même gaz parfait de coefficient isentropique  $\gamma = C_{pm} / C_{vm} = 1,35$  constant et le nombre  $n$  de moles de gaz admis dans le cylindre (à l'état A) est supposé inchangé par la combustion interne.

## A1 / ÉTUDE DU CYCLE

- A1\*a.** Justifier le caractère adiabatique de la compression [AB], de la détente [CD] et le caractère isochore de la combustion [BC] et du refroidissement [DA]. Pourquoi ne prend-on pas en compte les étapes [IA] et [AI] au cours desquelles le système constitué par le gaz contenu dans le cylindre est un système ouvert ?
- A1\*b.**  $Q_{BC}$  est le transfert thermique mis en jeu dans l'étape [BC]. Exprimer  $Q_{BC}$  en fonction de  $R, n, \gamma, T_B$  et  $T_C$ . Dans quel sens le transfert thermique  $Q_{BC}$  s'effectue-t-il ?
- A1\*c.**  $Q_{DA}$  est le transfert thermique mis en jeu dans l'étape [DA]. Exprimer  $Q_{DA}$  en fonction de  $R, n, \gamma, T_D$  et  $T_A$ . Dans quel sens le transfert thermique  $Q_{DA}$  s'effectue-t-il ?
- A1\*d.**  $W$  est le travail échangé au cours du cycle ABCD. Exprimer  $W$  en fonction de  $Q_{BC}$  et  $Q_{DA}$ .

## A2 / RENDEMENT THERMIQUE

**A2\*a.** Définir puis exprimer le rendement thermique  $r_{th}$  en fonction de  $Q_{BC}$  et  $Q_{DA}$ , puis en fonction de  $T_A$ ,  $T_B$ ,  $T_C$  et  $T_D$ .

**A2\*b.** Le rapport volumétrique  $a_v$  (encore appelé de manière impropre "taux de compression") est défini de la façon suivante :  $a_v = V_{max} / V_{min}$ . Exprimer le rendement thermique  $r_{th}$  en fonction de  $\gamma$  et  $a_v$  uniquement. Comment  $r_{th}$  varie-t-il en fonction de  $a_v$  ? Calculer sa valeur pour un rapport volumétrique  $a_v = 9$  (cette valeur sera conservée dans la suite du problème).

*Le rendement global  $r$  du moteur dépend du rendement thermique  $r_{th}$  mais aussi du rendement mécanique  $r_m$  caractérisant le transfert d'énergie du piston vers le vilebrequin. Le rendement mécanique n'excède pas 85 % et peut descendre en dessous de 60 % pour un moteur usagé.*

**A2\*c.** Calculer le rendement global  $r$  du moteur pour un rendement mécanique de 75 % et en déduire le volume d'essence produisant effectivement du travail sur 10 L d'essence consommés.

## A3 / INFLUENCE DE LA COMBUSTION

*La réaction qui a lieu au sein de la chambre est une réaction de combustion entre le carburant (dans le problème, l'octane  $C_8H_{18}$  sera choisi) et le comburant, l'air. Ceux-ci sont injectés dans des proportions stœchiométriques.*

**A3\*a.** Exprimer puis calculer le nombre  $n$  de moles du mélange gazeux aspiré par le cylindre au cours de la phase d'admission [IA], en fonction de  $P_A$ ,  $T_A$ ,  $R$  et  $C_V$ .

**A3\*b.** Au point B du cycle, exprimer la température  $T_B$  et la pression  $P_B$  qui règnent dans la chambre de combustion au moment de l'explosion, en fonction de  $T_A$ ,  $P_A$ ,  $a_v$  et  $\gamma$ . Effectuer les applications numériques.

**A3\*c.** Une anomalie de combustion est l'auto-allumage qui limite l'augmentation *a priori* recherchée du rapport volumétrique : le mélange {air-essence} s'enflamme spontanément dans certaines conditions de confinement avant le déclenchement de l'étincelle. Ce phénomène est reconnaissable aux cliquetis métalliques émis par le moteur. La température d'auto-allumage étant de 430 °C, calculer le rapport volumétrique maximal  $a_{v(max)}$  permettant d'éviter l'auto-allumage au cours de la phase [AB]. En déduire le rendement thermique maximal du moteur dans ces conditions.

**A3\*d.** Ecrire l'équation de la combustion. En déduire la masse  $m$  d'octane injectée pour la combustion, sachant que la composition de l'air (en pourcentages molaires) est 20,9 % en  $O_2$  et 79,1 % en  $N_2$ .

**A3\*e.** Expliquer pourquoi le mélange initial {air-essence} et les gaz d'échappement peuvent-ils être assimilés en première approximation à un même gaz parfait. Justifier qualitativement pourquoi le meilleur fonctionnement du moteur est obtenu lorsque carburant et comburant constituent un mélange stœchiométrique.

*Le Pouvoir Calorifique Inférieur (noté  $P_C$ ) est la quantité de chaleur libérée par kilogramme de carburant. Dans le cas de l'octane et dans ces conditions de confinement, il est de 44700 kJ.kg<sup>-1</sup>.*

**A3\*f.** Calculer la température  $T_C$  et la pression  $P_C$  qui règnent dans la chambre en fin de combustion. Comment expliquez-vous ces valeurs anormalement élevées ?

**A3\*g.** L'automobile se déplace sur une autoroute à la vitesse constante de 110 km.h<sup>-1</sup>, le vilebrequin effectuant 3500 tours par minute. Si le moteur fonctionnait exactement selon le cycle Beau de Rochas, un cycle correspondant à 2 tours du vilebrequin, calculer la consommation en carburant  $\mathcal{C}$  pour 100 km parcourus et la puissance  $\mathcal{P}$  développée par le véhicule en chevaux (un cheval-vapeur est équivalent à une puissance de 736 W). Commenter ce résultat.

## **Problème 2 : Attraction Gravitationnelle**

*La troisième partie de ce problème est indépendante des deux premières.*

On considère dans ce problème que la Terre possède une répartition de masse à symétrie sphérique, de centre  $O$ , de masse  $M_T$  et de rayon  $R_T$ . On pourra donc considérer que le champ gravitationnel créé par la Terre en un point  $M$ , extérieur à la Terre, est identique à celui créé par une masse ponctuelle  $M_T$  placée en  $O$ .

### **Preliminaire :**

1 – On se place en un point  $M$  de l'espace, extérieur à la Terre et situé à une distance  $r$  du centre de celle-ci.

On notera  $G$  la constante de gravitation universelle.

Rappeler l'expression du champ gravitationnel  $\vec{g}(M)$  créé par la Terre en un point  $M$  de l'espace.

On exprimera  $\vec{g}(M)$  en fonction de  $G$ ,  $M_T$ ,  $r$  et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Représenter le vecteur  $\vec{g}(M)$  sur un schéma.

### **Première partie : Satellite en mouvement autour de la Terre**

On étudie le mouvement autour de la Terre d'un satellite  $S$  de masse  $m$  placé dans le champ gravitationnel terrestre.

On néglige les frottements.

#### **Caractéristiques du mouvement du satellite autour de la Terre**

2 – On se place dans le référentiel, considéré comme galiléen, qui a pour origine le centre de la Terre et ses trois axes dirigés vers trois « étoiles fixes ». Quel est le nom de ce référentiel ?

Déterminer l'expression de la force  $\vec{f}$  à laquelle le satellite  $S$  est soumis. On exprimera  $\vec{f}$  en fonction de  $m$ ,  $G$ ,  $M_T$ ,  $r$  et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Déterminer de même l'expression de la force  $\vec{f}'$  à laquelle la Terre est soumise de la part du satellite. Justifier.

3 – En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que le mouvement du satellite  $S$  est nécessairement plan.

Sachant qu'à l'instant  $t = 0$  le satellite se trouve au point  $M_0$  et a une vitesse  $v_0$ , préciser le plan dans lequel se fait le mouvement.

**Dans la suite de cette partie, on se placera dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon  $r$  et d'altitude  $h$  autour de la Terre (avec  $r = h + R_T$ ) et on utilisera les coordonnées cylindriques.**

L'espace est rapporté à la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ , un point quelconque de l'espace étant repéré par ses coordonnées  $(r, \theta, z)$ .

Le plan dans lequel se fait le mouvement du satellite est le plan du repère cylindrique contenant l'origine  $O$  du repère (le point  $O$  étant le centre de la Terre) et les vecteurs  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ .

4 – En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que le module  $v$  de la vitesse du satellite S est nécessairement constant au cours du mouvement et déterminer son expression en fonction de  $\mathcal{G}$ ,  $M_T$  et  $r$ .

### Deuxième loi de Képler et conséquences

5 – Déterminer l'expression de la période  $T$  du mouvement de rotation de S autour de la Terre en fonction de  $v$  et de  $r$  puis en fonction de  $\mathcal{G}$ ,  $M_T$  et  $r$ . En déduire la troisième loi de Képler.

6 – Indiquer une méthode pour déterminer la masse de la Terre.  
Donner sans justification l'ordre de grandeur de la masse de la Terre.

7 – Un autre satellite S', de masse  $m'$ , en orbite circulaire autour de la Terre a une trajectoire de rayon  $r$  égal au rayon de la trajectoire de S. Les deux satellites tournent dans le même plan.  
S et S' risquent-ils de se heurter au cours de leur mouvement ? On justifiera la réponse apportée.

### Deuxième partie : Etude énergétique

La force à laquelle le satellite S est soumis dérive d'une énergie potentielle  $E_p$  telle que  $E_p$  peut s'écrire sous la forme  $E_p = -\frac{\alpha}{r}$  avec  $\alpha$  constante positive. On prendra par convention une énergie potentielle nulle à l'infini.

**On ne se limitera pas dans cette partie à un mouvement circulaire, mais on se placera dans le cas d'un mouvement quelconque du satellite S autour de la Terre.**

On notera  $C$  la constante des aires donnée par  $C = r^2 \dot{\theta}$ .

8 – Déterminer l'expression de  $\alpha$  en fonction des données du problème.

9 – Déterminer l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  du satellite S en fonction de  $m$ ,  $r$ ,  $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\alpha$ .

En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective du satellite en fonction de  $m$ ,  $C$ ,  $r$  et  $\alpha$ .  
Donner l'allure de la représentation graphique de l'énergie potentielle effective en fonction de  $r$ . En exploitant cette courbe, indiquer en fonction de la valeur de l'énergie mécanique le type de trajectoire suivie par le satellite et préciser dans chaque cas s'il s'agit d'un état de diffusion ou d'un état lié.

10 – Déterminer l'énergie mécanique  $E_{mc}$  associée à une trajectoire circulaire de rayon  $r_c$  en fonction de  $r_c$ ,  $m$ ,  $\mathcal{G}$  et  $M_T$ .

Déterminer la première vitesse cosmique  $v_1$ , vitesse du satellite sur une orbite basse de rayon  $R_T$  autour de la Terre en fonction de  $R_T$ ,  $\mathcal{G}$  et  $M_T$ .