

Mécanique et thermodynamique

Extrait de l'entête des sujets de la banque PT :

« La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. »

Problème 1 : Thermodynamique, moteur (Centrale-Supélec TSI)

Au début du XIX^e siècle, les chaudières des machines à vapeur, soumises à de trop fortes pressions, explosent assez souvent. Robert Stirling a ainsi imaginé en 1816 un moteur dépourvu de chaudière où la chaleur est apportée de l'extérieur de la machine (moteur à « air chaud »). L'utilisation de ce moteur restera limitée, en particulier en raison de la trop faible puissance des modèles proposés, insuffisante pour concurrencer la machine à vapeur et le moteur à combustion interne.

Le moteur Stirling bénéficie actuellement d'un nouvel intérêt car il présente de nombreux avantages. Il peut utiliser n'importe quelle source d'énergie produisant de la chaleur, combustion de tout matériau mais également énergie solaire, nucléaire, géothermique, etc. Il produit peu de vibrations et est silencieux (pas d'explosion interne ni d'échappement gazeux, absence de valves et soupapes). Grâce à l'utilisation de matériaux modernes qui supportent de grands écarts de température et qui améliorent les transferts thermiques, son rendement est comparable, voire supérieur à celui des moteurs à combustion interne. Son entretien est facile et il s'use moins que les moteurs à explosion.

La conception d'un moteur Stirling est cependant délicate, en raison des gros écarts de température qu'il doit supporter et de la nécessité d'une excellente étanchéité ; son prix reste donc élevé. Par ailleurs, il est difficile de faire varier son régime. Son emploi reste ainsi cantonné à des utilisations de niches : générateur d'électricité en milieux extrêmes, propulseur pour sous-marins, etc. Sa réversibilité conduit à l'utiliser comme pompe à chaleur capable de refroidir à -200 °C ou de chauffer à plus de 700 °C .

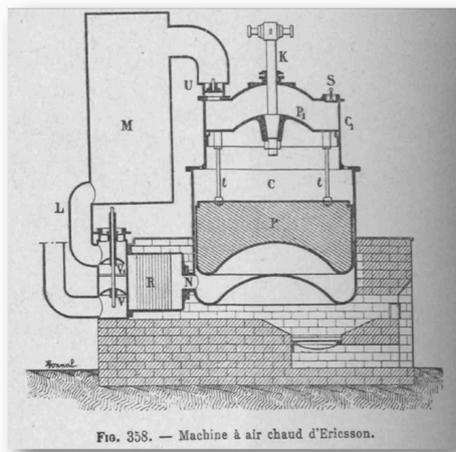


FIG. 358. — Machine à air chaud d'Ericsson.

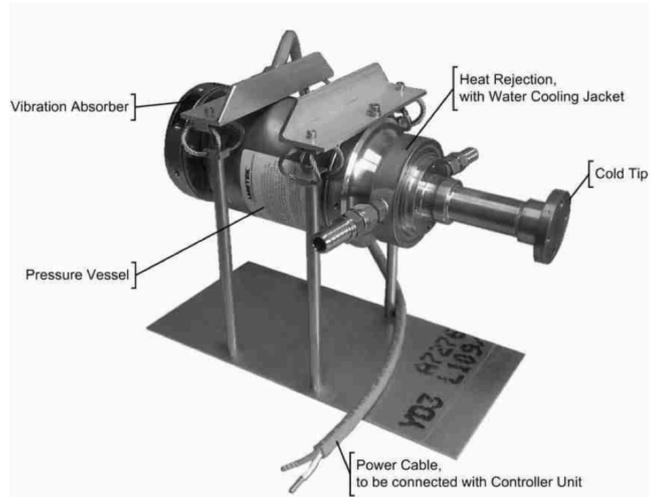


Figure 7 Gravure de 1899 d'un Moteur Ericsson M1851 avec régénérateur type Stirling (Wikipedia) et moteur Stirling de l'entreprise Sunpower fournissant le projet KRUSTY (ResearchGate)

III.A – Description du moteur

Une enceinte étanche est séparée en deux chambres, une chambre chaude (chauffée par l'extérieur), de volume maximal V_1 , et une chambre froide équipée d'un dissipateur thermique (ailettes), de volume maximal V_2 . Chaque chambre est dotée d'un piston permettant de faire varier son volume et le fluide peut circuler librement d'une chambre à l'autre. Le piston de la chambre froide est le piston de travail, il entraîne le piston de la chambre chaude appelé « déplaceur » car son rôle est de faire circuler le fluide entre les deux chambres. Lors du transvasement, le fluide passe de la chambre chaude à la température T_3 à la chambre froide à la température $T_1 < T_3$ et réciproquement.

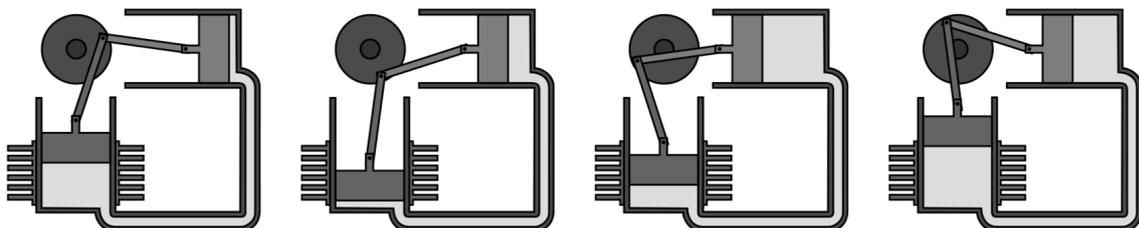


Figure 8 Phases de fonctionnement d'un moteur Stirling de type alpha (d'après Wikipedia)

Le mouvement du gaz peut être décrit par 4 phases plus ou moins distinctes (figure 8) :

- une phase de compression, pendant laquelle le volume de la chambre chaude est minimal, le fluide, entièrement situé dans la zone froide, est comprimé par le piston de travail dans sa course vers le bas ;
- une fois le piston de travail au point mort bas, le déplaceur est ramené à gauche, ce qui a pour effet de transvaser le fluide comprimé, qui passe de la zone froide vers la zone chaude et reçoit un transfert thermique de la source externe ;
- une phase de détente, pendant laquelle le fluide se détend dans le volume d'expansion où il continue d'être chauffé. Cette détente a pour effet de repousser le déplaceur et le piston de travail ;
- une fois que le piston de travail a atteint le point mort haut, le déplaceur est ramené à droite, ce qui a pour effet de transvaser le fluide de la zone chaude (volume d'expansion) vers la zone froide (volume de compression). Au cours de ce transfert, le fluide cède de la chaleur au refroidisseur.

Un cycle réel d'un moteur de Stirling est représenté dans le diagramme (p, V) en figure B du document réponse.

Q 30. Justifier que ce cycle est celui d'un moteur.

Q 31. Estimer la valeur du travail fourni par le moteur pendant un cycle.

III.B – Modélisation du cycle

On étudie le cycle de Stirling idéal. Au cours de celui-ci, n moles de gaz parfait de coefficient adiabatique γ subissent les transformations suivantes :

- une compression (1 \rightarrow 2) isotherme réversible à la température T_1 ,
- un échauffement (2 \rightarrow 3) isochore jusqu'à l'état 3 de température T_3 ,
- une détente (3 \rightarrow 4) isotherme réversible à la température T_3 ,
- un refroidissement (4 \rightarrow 1) isochore jusqu'à l'état 1.

Il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression.

Q 32. Représenter sur la figure B du document réponse, à rendre avec la copie, l'allure du diagramme correspondant au cycle idéal.

On note $r = \frac{V_1}{V_2}$ le rapport de compression entre les volumes fixés par construction. On rappelle que la capacité thermique à volume constant d'un gaz de n moles de gaz parfait vaut $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$ où R est la constante des gaz parfaits.

Q 33. Exprimer W_{12} , le travail reçu par le fluide au cours de la compression, en fonction de n , R , T_1 et r . En déduire le transfert thermique Q_{12} reçu par le fluide au cours de cette compression en fonction de n , R , T_1 et r . Préciser les signes de W_{12} et de Q_{12} .

Q 34. Exprimer Q_{23} , le transfert thermique reçu par le fluide au cours de l'échauffement isochore, en fonction de n , R , T_1 , T_3 et γ . Préciser son signe.

Q 35. Exprimer W_{34} , le travail reçu par le fluide au cours de la détente, en fonction de n , R , T_3 et r . En déduire le transfert thermique Q_{34} reçu par le fluide au cours de cette détente en fonction de n , R , T_3 et r . Préciser les signes de W_{34} et Q_{34} .

Q 36. Exprimer le transfert thermique Q_{41} reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de n , R , T_1 , T_3 et γ . Préciser son signe.

III.C – Rendement du moteur

Q 37. Définir puis exprimer le rendement idéal du moteur en fonction de T_1 , T_3 , r et γ .

Q 38. Définir et exprimer le rendement de Carnot en fonction de T_1 et T_3 .

En réalité, le moteur de Stirling utilisé dans le projet KRUSTY contient un régénérateur. Dans ce cas, la chaleur perdue par le gaz lors du refroidissement isochore (4 \rightarrow 1) est récupérée par le gaz lors du chauffage isochore (2 \rightarrow 3). Si le régénérateur est idéal, cette récupération est totale.

Q 39. Que devient le rendement du cycle idéal dans ce cas ?

Dans les conclusions du test de la NASA du dispositif KRUSTY réalisé en 2018, les ingénieurs indiquent que l'efficacité des moteurs a évolué pendant l'expérience entre 30 % et 50 % de l'efficacité de Carnot. De plus, pour les deux moteurs combinés, la puissance électrique obtenue est d'environ 180 W.

Q 40. En prenant une température chaude de 640 °C et une température froide de 60 °C et en supposant la conversion du travail mécanique en travail électrique parfaite, estimer numériquement la puissance thermique fournie par la source chaude aux deux moteurs de Stirling combinés.

Problème 2 : Thermodynamique, entropie (CCP, TSI)

1. Questions de cours

1.1. Donner la définition d'un système fermé.

Pour un système thermodynamique fermé, énoncer le second principe de la thermodynamique. On rappellera notamment le bilan entropique liant la variation d'entropie ΔS du système fermé à l'entropie reçue S^r et la production d'entropie S^p .

Toute équation devra être accompagnée d'une explication.

1.2. Bilans entropiques particuliers

1.2.1. Donner la définition d'un système isolé.

Que devient le bilan entropique du 1.1. dans le cas d'un système isolé ?

1.2.2. Donner la définition d'un système stationnaire.

Que devient le bilan entropique dans le cas d'un système stationnaire ?

1.3. Donner deux exemples de causes d'irréversibilité.

1.4. Dans les questions suivantes, on notera n la quantité de matière de gaz parfait, R la constante des gaz parfaits, C_p la capacité thermique à pression constante des n moles de gaz, C_v la capacité thermique à volume constant des n moles de gaz, et γ le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants. On supposera que C_v et C_p sont indépendants de la température T . On s'attachera à soigner les explications.

1.4.1. Exprimer la variation d'énergie interne d'un gaz parfait en fonction de la variation de la température.

1.4.2. Exprimer la variation d'entropie d'un gaz parfait en fonction des variations de température et de volume.

1.4.3. Dans le cas d'un gaz parfait, donner la relation entre C_p , C_v , R et n . Quel est le nom donné à cette relation ?

1.4.4. Exprimer C_p et C_v en fonction de n , R et γ .

2. Compression d'un gaz parfait

Un cylindre circulaire d'axe vertical et de section S est fermé par un piston de masse M . Pour traiter l'aspect thermodynamique de ce problème, on négligera les frottements du piston sur le cylindre (NB : ces frottements existent néanmoins et permettent d'atteindre l'état d'équilibre mécanique). On introduit dans le cylindre à température ambiante T une quantité d'azote n telle que le plan inférieur du piston soit, à l'équilibre, à une distance a_1 du fond (*fig.1*).

On notera P_0 la pression atmosphérique et on assimilera l'azote à un gaz parfait diatomique.

2.1. En étudiant l'équilibre du piston, donner l'expression de la pression P_1 à l'intérieur du cylindre en fonction de P_0 , M , S , et l'accélération de la pesanteur g .

On ajoute dorénavant une surcharge de masse m sur le piston (*fig.2*).

2.2. On suppose dans cette question que le nouvel équilibre mécanique est atteint avant que tout échange de chaleur n'ait eu lieu avec l'extérieur.

2.2.1. Exprimer la pression P_2 dans le cylindre en fonction de P_0, M, m, S et g .

2.2.2. Déterminer le travail des forces de pression atmosphérique exercées sur le piston et transmises intégralement au gaz en fonction de P_0 et de la variation de volume du gaz dans le cylindre.

2.2.3. Déterminer le travail de pesanteur de l'ensemble {piston + surcharge} en fonction de M, m, S et g et de la variation de volume du gaz dans le cylindre.

2.2.4. En appelant T_2 la température juste après l'équilibre mécanique et avant tout échange thermique, appliquer le premier principe de la thermodynamique au système fermé du gaz parfait et exprimer la nouvelle hauteur du piston a_2 en fonction de a_1, C_v, T_2, T, P_2 et S .

2.2.5. En déduire alors a_2 en fonction de a_1, γ, P_1 et P_2 .

2.3. On suppose maintenant que l'équilibre thermique s'est établi avec l'extérieur.

Exprimer la pression P_3 à l'intérieur du cylindre en fonction de P_0, M, m, S et g .

Exprimer ensuite la nouvelle position d'équilibre du piston a_3 en fonction de a_1, P_1 et P_3 , puis en fonction de a_1, P_0, M, m, S et g .

2.4. Quelle est la relation entre la quantité de chaleur Q et le travail W mis en jeu lors de l'ensemble de la transformation subie par le gaz ?

Donner l'expression du travail W . En déduire l'expression de la quantité de chaleur Q en fonction de P_3, a_3, a_1 et S , puis en fonction de n, R, T, P_0, M, m, S et g , toujours sur l'ensemble de la transformation.

2.5. On souhaite ici calculer les variations d'entropie sur l'ensemble de la transformation.

2.5.1. L'atmosphère extérieure ayant en permanence une température égale à T , quel nom peut-on lui donner ? En déduire l'expression de l'entropie reçue par l'extérieur. Exprimer la variation d'entropie de l'extérieur ΔS_{ext} en fonction de n, R, M, m, g, P_0 et S .

2.5.2. Quelle est l'entropie reçue par le gaz parfait dans le cylindre ? En utilisant la question 1.4.2, exprimer la variation d'entropie totale du gaz parfait dans le cylindre ΔS_{gaz} en fonction de n, R, M, m, g, P_0 et S .

2.5.3. En déduire la variation d'entropie de l'univers $\Delta S = \Delta S_{gaz} + \Delta S_{ext}$.

En posant $x(m) = \frac{mg}{Mg + P_0 S}$, montrer que $\Delta S = nR(x - \ln(1 + x))$.

2.5.4. La transformation est-elle réversible ? Justifier la réponse.

De la Terre à la Lune : Programme Apollo, 15 ans d'aventure spatiale

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'Homme de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969. La première partie étudie le départ de la Terre, la seconde l'arrivée sur la Lune. La troisième étudie l'écoulement des gaz dans la tuyère d'un des cinq moteurs-fusées du premier étage de la fusée.

I De la Terre ...

La fusée lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.

I.A – Décollage

I.A.1) Choix du référentiel

- a) Définir les référentiels terrestre et géocentrique, notés respectivement \mathcal{R}_T et \mathcal{R}_G .
- b) Définir un référentiel galiléen.

Dans toute la suite, \mathcal{R}_G sera le référentiel d'étude, considéré comme galiléen.

- c) Justifier ce choix.

I.A.2) Influence de la base de lancement

La Terre, associée à une sphère de rayon $R_T = 6,38 \times 10^3$ km, est animée d'un mouvement de rotation uniforme (figure 1) autour de l'axe Sud-Nord Tz , à la vitesse angulaire $\Omega = 7,29 \times 10^{-5}$ rad \cdot s $^{-1}$.

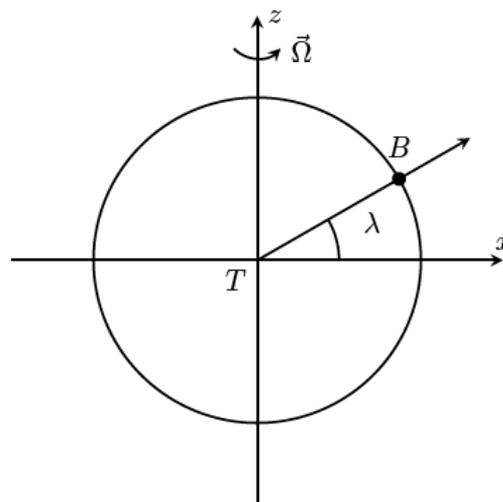


Figure 1 Latitude

- a) Donner la nature de la trajectoire d'un point B à la surface de la Terre, situé à la latitude λ .
- b) Établir l'expression du module v_B de sa vitesse.
- c) Application numérique : Calculer v_{B1} pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-unis ($\lambda_1 = 28,5^\circ$) et v_{B2} pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,2^\circ$).
Une fusée de masse m_F décolle du point B , sans vitesse initiale par rapport à la Terre, pour atteindre une orbite circulaire autour de la Terre avec la vitesse finale v_0 par rapport à \mathcal{R}_G .
- d) Déterminer l'expression de la variation d'énergie cinétique ΔE_c de la fusée, en fonction de v_B , v_0 et m_F .
- e) Calculer numériquement l'économie relative réalisée, définie par $\frac{\Delta E_{c1} - \Delta E_{c2}}{\Delta E_{c1}}$, en choisissant la base de Kourou plutôt que celle de Cap Canaveral, avec $v_0 = 8$ km \cdot s $^{-1}$. Commenter.
- f) Quel(s) autre(s) avantage(s) présente la base de Kourou ?

I.B.3) Mouvement d'un satellite

Un satellite de masse m_F est en orbite autour de la Terre à la distance r de son centre.

a) Donner l'expression de l'énergie potentielle E_{p0} associée, en la choisissant nulle pour $r \rightarrow \infty$.

b) Montrer que la trajectoire est plane. Quelle est sa nature ?

La trajectoire est maintenant considérée circulaire.

c) Exprimer la vitesse v_0 de la fusée, ainsi que son énergie cinétique E_{c0} , en fonction de \mathcal{G} , m_F , m_T et r .

d) Exprimer le rapport $\frac{T_0^2}{r^3}$, où T représente la période de révolution du satellite, en fonction de \mathcal{G} et m_T .

Quel est le nom de cette loi ? Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a , demi-grand axe de l'ellipse.

e) Application numérique : calculer v_0 et T_0 pour une orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$).

f) Donner enfin l'expression de l'énergie mécanique de la fusée sous la forme $E_{m0} = -\frac{K}{2r}$, en précisant la valeur de K . Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a , demi-grand axe de l'ellipse.

II ... à la Lune.

II.A – Objectif Lune

II.A.1) Orbite de transfert

La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1 , de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où d_{TL} représente la distance Terre-Lune (Figure 2).



Figure 2 Orbite de transfert

a) Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire.

b) En déduire l'expression de la vitesse v_1 . Application numérique.

c) Où est placée la Terre par rapport à cette ellipse ? À quel instant doit-on allumer les moteurs ?

d) Évaluer numériquement la durée t_1 du transfert Terre-Lune (parcours de la moitié de l'ellipse). On donne $d_{TL} = 3,8 \times 10^8$ m.

II.A.2) Orbite lunaire

Au voisinage de la Lune, de rayon R_L et de masse m_L , l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable.

L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.

Les paramètres du vol sont calculés pour qu'en cas de panne des moteurs, la fusée contourne la Lune pour revenir sur la Terre. (Ce fut le cas lors de la mission Apollo XIII). À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.

a) Faut-il freiner ou accélérer ? Justifier qualitativement.

b) Déterminer numériquement v_2 , vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune, avec $\mathcal{G} \times m_L = 4,9 \times 10^{12} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ et $R_L = 1,74 \times 10^3$ km.

Donnée: $G \times m_T = 4,0 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ avec m_T masse de la Terre et G constante universelle de la gravitation.