Mécanique et thermodynamique

Extrait de l'entête des sujets de la banque PT :

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.

- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Problème 1 : séisme et sismographe (Extrait CCINP PSI)

Un séisme ou tremblement de terre est une secousse du sol résultant de la libération brusque d'énergie accumulée par les contraintes exercées sur les roches. Cette libération d'énergie provient de la rupture des roches le long d'une faille préexistante, d'une activité volcanique. Elle peut être aussi d'origine artificielle (explosions par exemple). Les mouvements des roches engendrent des vibrations élastiques qui se propagent, sous la forme de paquets d'ondes sismiques, autour et au travers du globe terrestre.

Les mouvements du sol sont étudiés par l'intermédiaire de sismographes. L'acquisition et l'enregistrement du signal s'obtiennent dans une station sismique regroupant, outre les sismographes eux-mêmes, des enregistreurs, des numériseurs, des horloges et des antennes GPS.

Un sismographe simple (**figure 1**) est constitué d'un support rigide de hauteur h, auquel on suspend une masse m, supposée ponctuelle, par l'intermédiaire d'un ressort de masse négligeable de raideur k, de longueur à vide l_0 et d'un amortisseur de coefficient de frottement λ. Cet amortisseur exerce sur la masse m une force : $\vec{F}_a = \lambda \frac{d(h-z)}{dt}\vec{e}_z = -\lambda \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$.

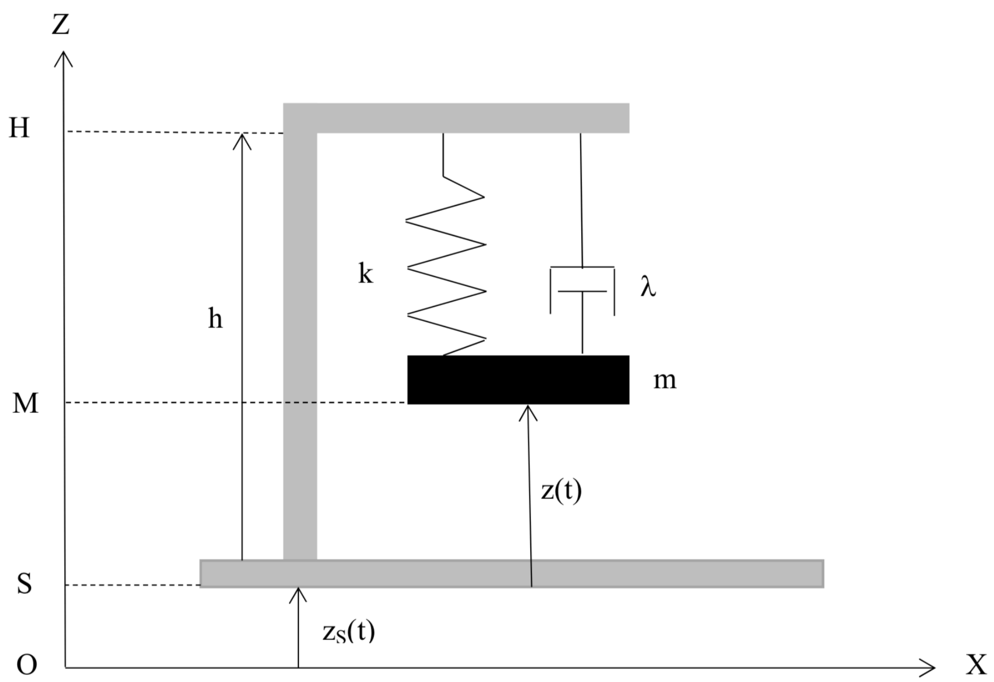


Figure 1 - Sismographe

Un mouvement vertical du sol déclenche un mouvement vertical de la masse m caractérisé par la fonction z(t) dans le référentiel lié au sol.

On pose : $z(t) = z_{éq} + u(t)$. La position $z = z_{éq}$ correspond à la position d'équilibre de la masse m en l'absence de séisme et u(t) représente l'écart par rapport à l'équilibre.

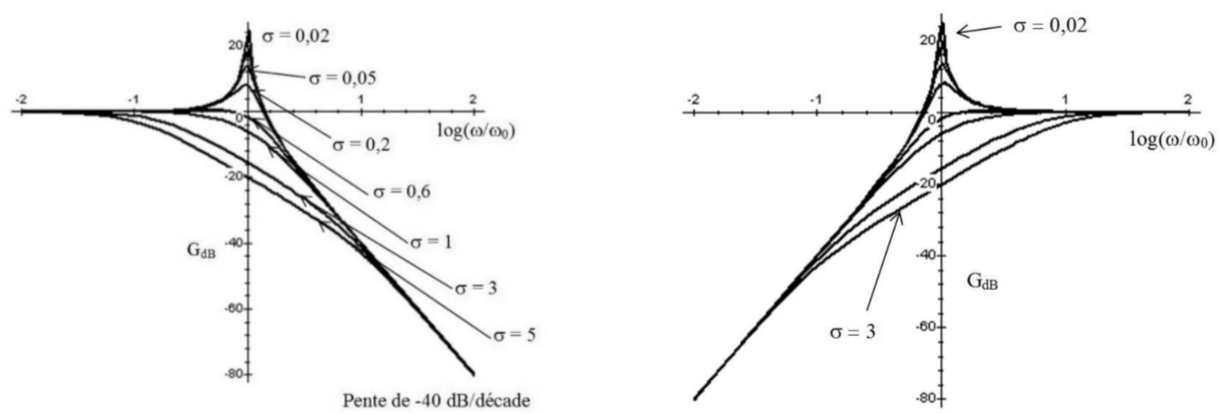
On modélise une composante en fréquence de la vibration verticale du sol par rapport à un référentiel galiléen (O, X, Y, Z) au moyen de la fonction : $z_s(t) = Z_0\cos(\omega t)$.

Q1. Écrire l'équation différentielle qui relie z(t), $z_s(t)$, m, g, λ, h, k et l_0. Préciser l'expression de $z_{éq}$, puis l'équation différentielle qui relie u(t), $z_s(t)$, m, λ et k.

Le sismographe peut être assimilé à un système linéaire de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{z_S}(t)}.$$

On donne sur la **figure 2** les diagrammes de Bode en amplitude pour des filtres du second ordre.



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1+2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}+(\frac{j\omega}{\omega_0})^2} \qquad \underline{H}(j\omega) = \frac{H_0(\frac{j\omega}{\omega_0})^2}{1+2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0}+(\frac{j\omega}{\omega_0})^2}$$

Figure 2 - Diagrammes de Bode en amplitude

Q2. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du sismographe en fonction de m, k, λ, ω et j, nombre complexe tel que $j^2 = -1$. De quel type de filtre s'agit-il ?

Q3. Préciser l'expression de l'amplitude maximale U de la réponse verticale u(t) du régime forcé de la masse m en fonction de Z_0, m, k, λ et ω.

Q4. Écrire deux conditions portant sur la fréquence et les rapports $\frac{k}{m}$ et $\frac{\lambda}{m}$ pour que l'amplitude U du mouvement de la masse m soit égale à l'amplitude Z_0 du sol. La suspension est-elle qualifiée de souple ou de rigide ? La masse m vibre-t-elle en phase, en quadrature de phase ou en opposition de phase avec le sol ?

Q5. Le cahier des charges du sismographe impose d'éviter tout phénomène de résonance, ce qui impose une condition supplémentaire sur la grandeur sans dimension $\frac{\lambda}{\sqrt{k\cdot m}}$. Préciser cette condition supplémentaire à l'aide d'une inégalité.

Problème 2 : de la Terre à la Lune : Programme Apollo, 15 ans d'aventure spatiale (extrait Concours Centrale-Supélec, TSI, 2012)

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'Homme de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969. La première partie étudie le départ de la Terre, la seconde l'arrivée sur la Lune. La troisième étudie l'écoulement des gaz dans la tuyère d'un des cinq moteurs-fusées du premier étage de la fusée.

I De la Terre ...

La fusée lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.

I.A – Décollage

I.A.1) Choix du référentiel

a) Définir les référentiels terrestre et géocentrique, notés respectivement $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{R}_G$.

b) Définir un référentiel galiléen.

Dans toute la suite, $\mathcal{R}_G$ *sera le référentiel d'étude, considéré comme galiléen.*

c) Justifier ce choix.

I.A.2) Influence de la base de lancement

La Terre, associée à une sphère de rayon $R_T = 6{,}38 \times 10^3$ km, est animée d'un mouvement de rotation uniforme (**figure 1**) autour de l'axe Sud-Nord Tz, à la vitesse angulaire $\Omega = 7{,}29 \times 10^{-5}$ rad $\cdot$ s^{-1}.

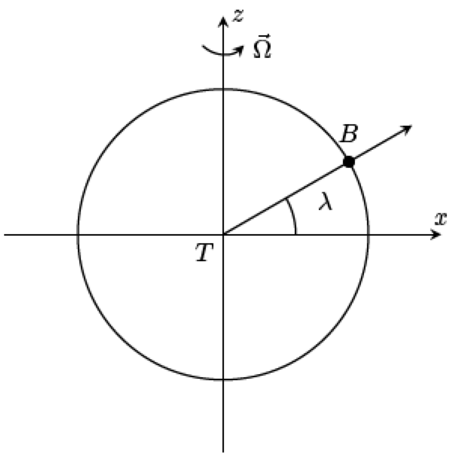


Figure 1 Latitude

a) Donner la nature de la trajectoire d'un point B à la surface de la Terre, situé à la latitude λ.

b) Établir l'expression du module v_B de sa vitesse.

c) Application numérique : Calculer v_{B1} pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-unis ($\lambda_1 = 28{,}5\ °$) et v_{B2} pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5{,}2\ °$).

Une fusée de masse m_F décolle du point B, sans vitesse initiale par rapport à la Terre, pour atteindre une orbite circulaire autour de la Terre avec la vitesse finale v_0 par rapport à $\mathcal{R}_G$.

d) Déterminer l'expression de la variation d'énergie cinétique ΔE_c de la fusée, en fonction de v_B, v_0 et m_F.

e) Calculer numériquement l'économie relative réalisée, définie par $\dfrac{\Delta E_{c1} - \Delta E_{c2}}{\Delta E_{c1}}$, en choisissant la base de Kourou plutôt que celle de Cap Canaveral, avec $v_0 = 8$ km $\cdot$ s^{-1}. Commenter.

f) Quel(s) autre(s) avantage(s) présente la base de Kourou ?

I.B.3) Mouvement d'un satellite

Un satellite de masse m_F est en orbite autour de la Terre à la distance r de son centre.

a) Donner l'expression de l'énergie potentielle E_{p0} associée, en la choisissant nulle pour $r \to \infty$.

b) Montrer que la trajectoire est plane. Quelle est sa nature ?

La trajectoire est maintenant considérée circulaire.

c) Exprimer la vitesse v_0 de la fusée, ainsi que son énergie cinétique E_{c0}, en fonction de $\mathcal{G}$, m_F, m_T et r.

d) Exprimer le rapport $\frac{T_0^2}{r^3}$, où T représente la période de révolution du satellite, en fonction de $\mathcal{G}$ et m_T.

Quel est le nom de cette loi ? Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a, demi-grand axe de l'ellipse.

e) Application numérique : calculer v_0 et T_0 pour une orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$) .

f) Donner enfin l'expression de l'énergie mécanique de la fusée sous la forme $E_{m0} = -\frac{K}{2r}$, en précisant la valeur de K. Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r par a, demi-grand axe de l'ellipse.

Données : $G \times m_T = 4{,}0 \times 10^{14}$ m^3.s^{-2} avec m_T la masse de la Terre et G la constante universelle de gravitation.

II ... à la Lune.

II.A – Objectif Lune

II.A.1) Orbite de transfert

La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1, de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où d_{TL} représente la distance Terre-Lune (Figure 2).

Figure 2 Orbite de transfert

a) Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire.

b) En déduire l'expression de la vitesse v_1. Application numérique.

c) Où est placée la Terre par rapport à cette ellipse ? À quel instant doit-on allumer les moteurs ?

d) Évaluer numériquement la durée t_1 du transfert Terre-Lune (parcours de la moitié de l'ellipse). On donne $d_{TL} = 3{,}8 \times 10^8$ m.

II.A.2) Orbite lunaire

Au voisinage de la Lune, de rayon R_L et de masse m_L, l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable .

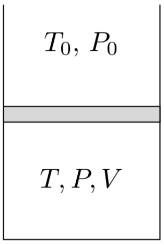
L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.

Les paramètres du vol sont calculés pour qu'en cas de panne des moteurs, la fusée contourne la Lune pour revenir sur la Terre. (Ce fut le cas lors de la mission Apollo XIII). À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.

a) Faut-il freiner ou accélérer ? Justifier qualitativement.

b) Déterminer numériquement v_2, vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune, avec $\mathcal{G} \times m_L = 4{,}9 \times 10^{12}$ m$^3 \cdot$ s^{-2} et $R_L = 1{,}74 \times 10^3$ km.

Problème 3 : comparaison entre transformations



On considère un système composé d'une quantité de matière n de gaz parfait diatomique enfermée dans une enceinte. Cette enceinte est fermée par un piston de surface S et dont on négligera la masse, pouvant coulisser sans frottement. L'ensemble est situé dans l'atmosphère, dont on note T_0 et P_0 la température et la pression. On note I l'état initial. L'objectif est de comparer deux transformations du système : l'une brutale et l'autre lente.

Donnée : capacité thermique à volume constant $C_V = 5nR/2$.

Commençons par la transformation brutale : on lâche brusquement une masse M sur le piston, qui se stabilise en un état intermédiaire 1.

1 - Le meilleur modèle pour la transformation est-il isotherme ou adiabatique ? Peut-on en déduire un résultat sur la température T_1 ?

2 - Déterminer la pression P_1.

3 - Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chacun des termes.

4 - En déduire les caractéristiques T_1, P_1, V_1 de l'état 1.

On observe qu'en fait l'état 1 n'est pas un réel état d'équilibre : le piston continue de bouger, mais beaucoup plus lentement, jusqu'à atteindre l'état 2 qui est l'état final.

5 - Quel phénomène, négligé précédemment, est responsable de cette nouvelle transformation du système ?

6 - Déterminer les caractéristiques T_2, P_2, V_2 de l'état 2.

7 - Déterminer le travail reçu par le système, puis sa variation d'énergie interne et en déduire le transfert thermique reçu au cours de la transformation $1 \to 2$. En déduire le travail total et le transfert thermique total reçus au cours de la transformation brusque.

Comparons maintenant à une transformation lente : la même masse M est lâchée très progressivement sur le piston, par exemple en ajoutant du sable « grain à grain ».

8 - Comment qualifie-t-on une telle transformation ? Que peut-on en déduire sur la température du système au cours de la transformation ?

9 - Déterminer la pression dans l'état final et en déduire le volume. Commenter.

10 - Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chaque terme. Comparer à la transformation brutale. Commenter.

Bonnes vacances