

Mécanique et solution aqueuse

Extrait de l'entête des sujets de la banque PT :

« La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la **clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. »

Problème 1 : Le système GPS (Extrait du concours E3A)

Le principe du positionnement par GPS (Global Positioning System ou Géopositionnement Par Satellite) repose sur la mesure de la durée de transit d'un signal transmis par une onde électromagnétique (OEM) entre des satellites dont la position est exactement connue à tout instant, dénommés NAVSTAR (NAVigation Satellite Timing And Ranging) et un récepteur. Cette durée est ensuite simplement convertie en distance puisqu'on connaît très précisément la célérité d'une OEM. Pour une précision optimale, un récepteur sur Terre doit « voir » au minimum quatre satellites simultanément.

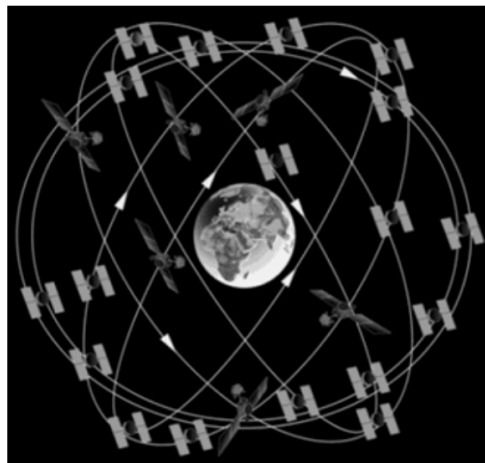


FIGURE 1 – Constellation satellite GPS

Public domain, <http://www.gps.gov/multimedia/images/constellation.gif>.

Vu sur le site <https://www.maanmittauslaitos.fi/en/research/interesting-topics/satellite-based-positioning-systems>

Le système fut mis en place par le département de la Défense des États-Unis à partir de 1973, à l'origine, uniquement à des fins militaires. Avec ses vingt-quatre satellites, il est devenu totalement opérationnel en 1995. Le 2 mai 2000, le président étatsunien Bill Clinton confirme l'intérêt de la technologie à des fins civiles et autorise une diffusion non restreinte des signaux GPS, permettant une précision de l'ordre d'une dizaine de mètres et une démocratisation de la technologie au grand public à partir du milieu des années 2000. De nos jours les récepteurs GPS se sont banalisés et ont envahi notre environnement quotidien (automobile, smartphones, montre connectée, etc).

Le système comprend vingt-quatre satellites placés sur des orbites pratiquement circulaires d'altitudes voisines de $2,00 \times 10^4$ km (voir figure 1). Les satellites sont placés sur six orbites dont le plan est incliné de 55° par rapport au plan de l'équateur. Ces orbites sont décalées en longitude de 60° . Sur chaque orbite, il y a quatre satellites. On notera pour information que les satellites ne sont pas régulièrement espacés sur leur orbite. Leur répartition a été choisie pour optimiser le nombre de satellites visibles en chaque point de la Terre à un instant « t ». Les zones les plus défavorisées sont voisines des pôles. Sur la photo de la figure 2 prise lors de la phase finale d'assemblage, on peut se faire une idée des dimensions d'un satellite NAVSTAR munis de ses panneaux solaires en le comparant à la personne située à ses côtés.

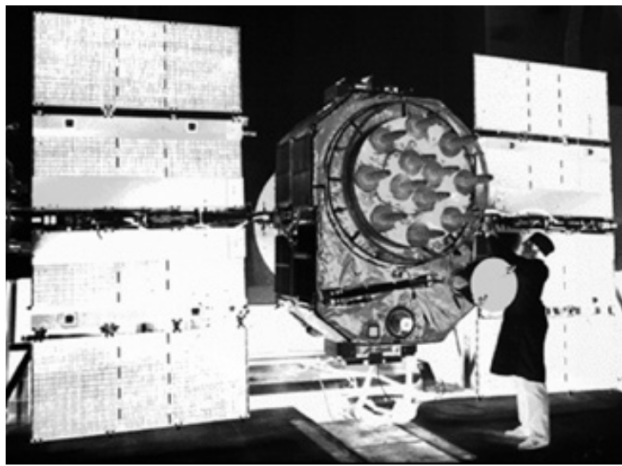


FIGURE 2 – Satellite NAVSTAR

Public domain, <http://www.gps.gov/multimedia/images/constellation.gif>.
 Vu sur le site <https://www.maanmittauslaitos.fi/en/research/interesting-topics/satellite-based-positioning-systems>

A/ Trajectoires de satellites

Dans tout le problème, le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique supposé galiléen. Les données nécessaires sont regroupées en annexe à la fin de l'énoncé.

Q1 - Rappeler l'expression de la force de gravitation \vec{F} exercée par la Terre sur un satellite NAVSTAR. Le centre de la Terre est situé en O . On notera r la distance OM du satellite (masse ponctuelle m) placé au point M , $r > R_T$ où R_T est le rayon terrestre. On exprimera \vec{F} en fonction de la constante de gravitation universelle G , des autres données et on utilisera le vecteur unitaire noté habituellement \vec{u}_r en coordonnées sphériques (figure 3).

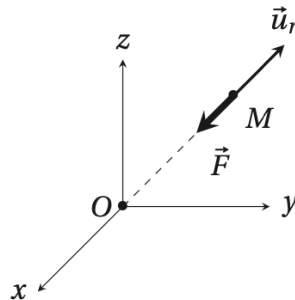


FIGURE 3 – Repère sphérique

Q2 - En ne prenant en compte que cette unique force d'attraction qui s'exerce sur le satellite, montrer que :

- sa trajectoire est plane ;
- son énergie mécanique notée E_m est conservée ;
- et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$$

avec A et B deux constantes positives à définir, s'exprimant en fonction de m , M_T , G et de la constante des aires C . L'énergie potentielle est prise nulle à l'infini.

Q3 - Soit la fonction $E_{p \text{ eff}}(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$. Tracer son allure puis prouver qu'elle passe par un minimum noté r_0 . Exprimer r_0 en fonction de A et B puis donner sa signification physique ainsi que l'ordre de grandeur de sa valeur numérique pour un satellite NAVSTAR placé sur son orbite de travail. Comment est habituellement dénommée cette fonction $E_{p \text{ eff}}(r)$?

On donne la définition d'un jour sidéral terrestre : c'est la durée que met la Terre pour faire un tour sur elle-même par rapport au point vernal (point considéré comme fixe dans le référentiel héliocentrique), indépendamment de sa révolution autour du Soleil. Elle vaut environ 23 h 56 min 4 s.

Q4 - Quelle est la période de révolution du satellite ? Comparer cette valeur à celle d'un jour sidéral et conclure.

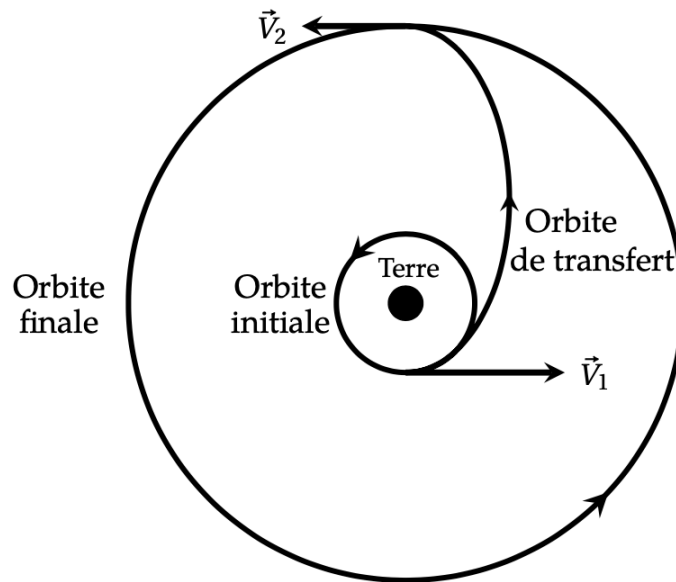


FIGURE 4 – Orbites circulaires et orbite de transfert

Le placement d'un satellite sur son orbite définitive s'effectue très schématiquement en trois phases (figure 4) :

Phase 1 : mise en orbite basse initiale supposée circulaire, de rayon $R_1 = R_T + h_1$, où $h_1 = 1,50 \times 10^3$ km.

Phase 2 : on fournit une très brève impulsion au satellite (vitesse V_1 après l'impulsion) pour le placer sur une orbite elliptique dite transfert (ou d'Hohmann) dont l'apogée se trouve sur l'orbite définitive.

Phase 3 : une seconde impulsion permet d'atteindre l'orbite finale supposée circulaire de rayon R_2 où la vitesse du satellite est V_2 .

Q5 - Donner sans démonstration l'expression de l'énergie mécanique E_{m1} d'un satellite NAVSTAR de masse $m = 800$ kg sur son orbite basse à l'altitude $h_1 = 1,50 \times 10^3$ km. On suppose l'énergie potentielle nulle à l'infini. Application numérique.

Q6 - Comparer E_{m1} à $E_{m0} = \alpha \cos^2(\lambda) - \beta$, énergie mécanique du satellite posé au sol, avant son décollage, de la base de lancement située à la latitude λ . Les valeurs de α et β sont $\alpha = 8,6 \times 10^7$ J et $\beta = 5,006 \times 10^{10}$ J. Quelle est la valeur optimale pour λ ? Faire l'application

numérique pour cette valeur optimale. Conclure.

Q7 - À partir de l'expression de l'énergie mécanique pour une trajectoire circulaire de rayon r , on peut montrer qu'il suffit de substituer au rayon r la valeur du demi-grand axe a de l'ellipse pour généraliser cette expression à une trajectoire elliptique. En déduire la valeur numérique de l'énergie mécanique E_{m12} sur l'orbite de transfert.

On suppose que la durée d'allumage des fusées est très courte (boost) devant la période de révolution et que le satellite n'a quasiment pas bougé durant cette phase.

Q8 - En déduire la variation de vitesse ΔV_1 à appliquer au satellite pour qu'il passe de l'orbite basse à celle de transfert. Effectuer l'application numérique.

Q9 - Quelle est la durée du transfert? (*La troisième loi de Kepler est rappelée en annexe.*)

Pour réduire les coûts, on envisage d'autres trajectoires qui utilisent moins de satellites.

Q10 - Définir ce qu'on appelle un satellite géostationnaire en précisant les caractéristiques de son orbite, son altitude, sa visibilité depuis un point donné de la Terre, son usage et toute autre donnée jugée digne d'intérêt. On pourra par exemple se poser la question si un tel satellite pourrait se trouver de manière permanente à la verticale d'une ville française en justifiant la réponse.

Q11 - Serait-il envisageable d'utiliser uniquement des satellites géostationnaires dans un système GPS? Expliciter votre réponse.

Annexe

Constantes fondamentales :

Célérité de la lumière dans le vide :	$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck :	$h = 6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Charge élémentaire :	$e = 1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante de gravitation universelle :	$G = 6,674\,30 \times 10^{-11} \text{ USI}$

Formulaire :

Masse de la Terre :	$M_T = 5,9722 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon terrestre :	$R_T = 6,371 \times 10^3 \text{ km}$
Masse de l'électron :	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Permittivité du vide :	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T},$$

où T est la période révolution et a le demi-grand axe de l'ellipse.

Opérateurs différentiels :

$$\text{rôt}(\text{rôt } \vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}.$$

Développements limités :

$$\sqrt{1-\epsilon} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2} ; \quad \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}.$$

Problème 2 : Le chlorure d'hydrogène (extrait CC INP TSI)

Partie I - Autour de l'élément chlore

- I.1-** Déterminer la configuration électronique de l'atome de chlore dans son état fondamental. Combien l'atome possède-t-il d'électrons de valence ? Justifier.
- I.2-** Expliquer quel anion monoatomique le chlore peut former.
- I.3-** L'élément chlore est présent dans le chlorure d'hydrogène HCl et l'ion hypochlorite ClO⁻.
Proposer un schéma de Lewis pour :
- a- la molécule de chlorure d'hydrogène HCl.
 - b- l'ion hypochlorite ClO⁻.

Partie II - La solution commerciale d'acide chlorhydrique

L'acide chlorhydrique est une solution aqueuse obtenue par dissolution de chlorure d'hydrogène HCl_(g) dans l'eau. L'acide chlorhydrique est une solution acide utilisée comme décapant et comme détartrant notamment pour les surfaces émaillées recouvertes de calcaire.

Sur une bouteille d'acide commercial figure l'indication suivante : solution à P = 23 % en chlorure d'hydrogène minimum. Cette indication signifie que 100 g de solution commerciale ont été obtenus par dissolution d'au moins 23 g de chlorure d'hydrogène. P est donc un pourcentage massique en HCl_(g) dissous dans la solution commerciale.

On souhaite vérifier la teneur exacte en chlorure d'hydrogène dissous de cette solution commerciale.

La densité de la solution commerciale est $d = 1,15$.

Détermination de la composition de la solution commerciale à partir de la donnée de l'étiquette.

II.4- Déterminer la masse minimale de chlorure d'hydrogène dissous dans 1L de solution commerciale.

II.5- Le chlorure d'hydrogène n'existe pas dans l'eau car, lors de sa dissolution, il se comporte comme un acide fort et réagit totalement avec l'eau pour former cette solution aqueuse, appelée acide chlorhydrique.

- a- Ecrire la réaction chimique mise en jeu entre le chlorure d'hydrogène et l'eau.
- b- Indiquer l'espèce chimique acide présente dans l'acide chlorhydrique.

II.6- En déduire la concentration molaire minimale des espèces chimiques contenues dans cette solution commerciale d'acide chlorhydrique.

Dosage de la solution commerciale par suivi colorimétrique.

La solution commerciale est diluée 500 fois. La concentration molaire de la solution S₀ ainsi préparée est appelée C₀.

Cette solution S₀ est ensuite dosée par colorimétrie. Pour cela, un volume V₀ = 10,0 mL de cette solution est prélevé et dosé par une solution d'hydroxyde de sodium (Na⁺_(aq) + HO⁻_(aq)) étalon fraîchement préparée de concentration molaire C_b = 1,0.10⁻² mol.L⁻¹.

Le changement de couleur de l'indicateur coloré est obtenu pour un volume versé V_{beq} = 16,2 mL. (Deux dosages cohérents ont été effectués).

II.7- Ecrire l'équation de la réaction de dosage et calculer sa constante d'équilibre à 298 K. Justifier le fait que cette réaction puisse être utilisée comme réaction de dosage.

II.8- a- Donner la valeur du pH à l'équivalence du dosage.

b- Parmi les trois indicateurs colorés acido-basiques fournis ci-dessous avec leur zone de virage, indiquer celui qui serait le mieux adapté pour ce dosage.

- Hélianthine : zone de virage pour pH variant de 3,1 à 4,4

- Bleu de bromothymol : zone de virage pour pH variant de 6,0 à 7,6

- Phénolphthaleïne : zone de virage pour pH variant de 8,2 à 10,0

Dosage de la solution commerciale suivi par pH-métrie.

Un dosage colorimétrique étant peu précis, on souhaite améliorer la détermination du volume équivalent en effectuant un dosage suivi par pH-métrie. Un volume V_0 de la solution S_0 de concentration C_0 est placé dans un bécher, dans lequel sont plongées les électrodes reliées à un pH-mètre. Le pH est relevé après introduction, mL par mL, d'une solution de soude étalon.

Dans le document réponse 1, figure la courbe de dosage du dosage de $V_0 = 10,0$ mL de la solution S_0 par de la soude ($\text{Na}^+_{(\text{aq})} + \text{HO}^-_{(\text{aq})}$) de concentration molaire $C_b = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Cette courbe sera à rendre avec la copie.

Pour trouver le point équivalent par une autre méthode que la méthode des tangentes, il est possible d'utiliser la méthode de Gran.

II.9- A l'aide d'un tableau d'avancement, établir, avant l'équivalence, c'est-à-dire pour $V_b < V_{\text{beq}}$, l'expression littérale de la concentration molaire $[\text{H}_3\text{O}^+]$ en fonction de C_0 , C_b , V_0 , V_b .

II.10- En utilisant la relation à l'équivalence reliant C_0 , V_0 , C_b et V_{beq} , donner l'expression littérale donnant $[\text{H}_3\text{O}^+]$ avant l'équivalence en fonction de C_b , V_0 , V_b , V_{beq} .

II.11- Soit $F(V_b) = 10^{-\text{pH}}(V_0 + V_b)$, grandeur calculée grâce aux mesures expérimentales. $F(V_b)$ peut aussi s'écrire $F(V_b) = [\text{H}_3\text{O}^+](V_0 + V_b)$.

a- Montrer que $F(V_b) = C_b(V_{\text{beq}} - V_b)$.

b- Dédurre de cette expression la forme de la courbe représentant la fonction $F(V_b)$ en fonction de V_b .

c- Expliquer comment le tracé de cette courbe permet d'obtenir le volume équivalent V_{beq} .

II.12- La courbe précédente est tracée sur le document réponse 1 pour des volumes V_b variant de 0 à 14,0 mL.

En déduire V_{beq} avec trois chiffres significatifs.

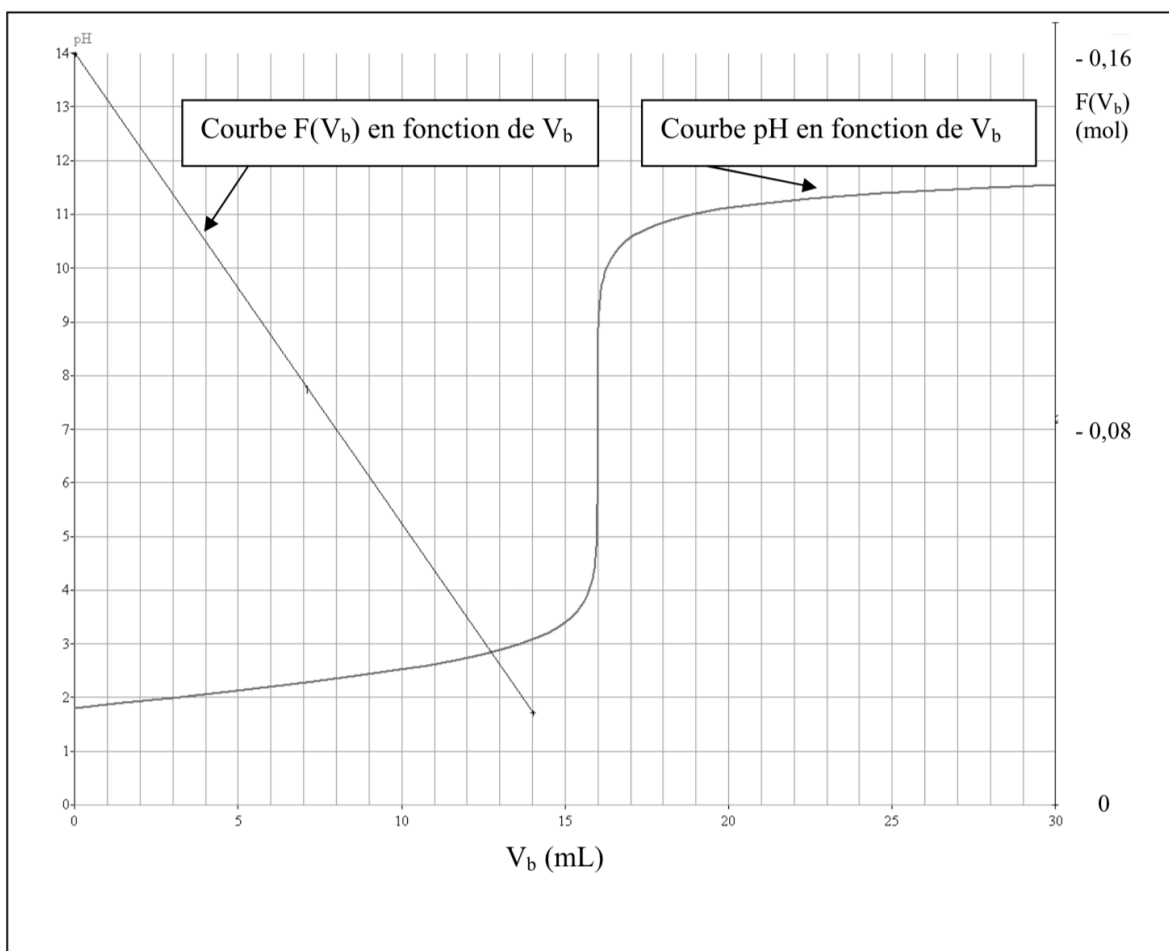
II.13- Déterminer la concentration molaire C_0 en ions hydronium H_3O^+ dans la solution S_0 .

II.14- En déduire la concentration molaire C_{com} de la solution commerciale en tenant compte du facteur de dilution.

II.15- Déterminer la masse de chlorure d'hydrogène dissous dans 1L de la solution commerciale dosée.

II.16- En déduire le pourcentage massique de chlorure d'hydrogène dissous dans la solution commerciale dosée. L'information sur l'étiquette était-elle correcte ?

Dosage de $V_0 = 10,0$ mL de la solution S_0 d'acide chlorhydrique par de l'hydroxyde de sodium
 $(\text{Na}^+_{(\text{aq})} + \text{HO}^-_{(\text{aq})})$ à $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$



Données

Numéros atomiques Z :

Cl : Z = 17 ; H : Z = 1 ; O : Z = 8

Masses molaires atomiques :

$M_{\text{H}} = 1,0 \text{ g.mol}^{-1}$

$M_{\text{Cl}} = 35,5 \text{ g.mol}^{-1}$

Potentiels standard d'oxydo-réduction à 298 K :

$E_1^\circ(\text{HClO}_{(\text{aq})}/\text{Cl}_{2(\text{aq})}) = 1,60 \text{ V}$

$E_2^\circ(\text{Cl}_{2(\text{aq})}/\text{Cl}^-_{(\text{aq})}) = 1,39 \text{ V}$

$E_3^\circ(\text{I}_{2(\text{aq})}/\text{I}^-_{(\text{aq})}) = 0,62 \text{ V}$

$E_4^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}_{(\text{aq})}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}_{(\text{aq})}) = 0,09 \text{ V}$

$\frac{RT \ln(x)}{F} = 0,06 \log(x) \text{ V}$ où $T = 298 \text{ K}$.

Produit ionique de l'eau à 298 K :

$K_e = 10^{-14}$

Masse volumique de l'eau à 298 K :

$\rho = 1 \text{ g.cm}^{-3}$

$R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$