# Mécanique, thermodynamique

# Problème 1 : De la Terre à la Lune : Programme Apollo, 15 ans d'aventure spatiale (extrait Concours Centrale-Supélec, TSI, 2012)

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'Homme de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969. La première partie étudie le départ de la Terre, la seconde l'arrivée sur la Lune. La troisième étudie l'écoulement des gaz dans la tuyère d'un des cinq moteurs-fusées du premier étage de la fusée.

## I De la Terre ...

La fusée lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.

### *I.A – Décollage*

#### I.A.1) Choix du référentiel

*a)* Définir les référentiels terrestre et géocentrique, notés respectivement $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{R}_G$.

*b)* Définir un référentiel galiléen.

Dans toute la suite, $\mathcal{R}_G$ *sera le référentiel d'étude, considéré comme galiléen.*

*c)* Justifier ce choix.

#### I.A.2) Influence de la base de lancement

La Terre, associée à une sphère de rayon $R_T = 6{,}38 \times 10^3$ km, est animée d'un mouvement de rotation uniforme (figure 1) autour de l'axe Sud-Nord $Tz$, à la vitesse angulaire $\Omega = 7{,}29 \times 10^{-5}$ rad · s$^{-1}$.

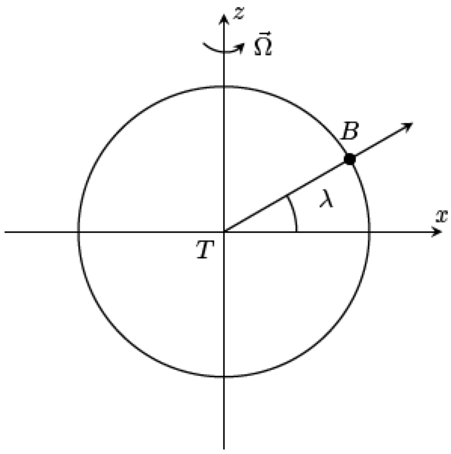



**Figure 1** Latitude

*a)* Donner la nature de la trajectoire d'un point $B$ à la surface de la Terre, situé à la latitude $\lambda$.

*b)* Établir l'expression du module $v_B$ de sa vitesse.

*c)* Application numérique : Calculer $v_{B1}$ pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-unis ($\lambda_1 = 28,5$ °) et $v_{B2}$ pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,2$ °).

Une fusée de masse $m_F$ décolle du point $B$, sans vitesse initiale par rapport à la Terre, pour atteindre une orbite circulaire autour de la Terre avec la vitesse finale $v_0$ par rapport à $\mathcal{R}_G$.

*d)* Déterminer l'expression de la variation d'énergie cinétique $\Delta E_c$ de la fusée, en fonction de $v_B$, $v_0$ et $m_F$.

*e)* Calculer numériquement l'économie relative réalisée, définie par $\dfrac{\Delta E_{c1} - \Delta E_{c2}}{\Delta E_{c1}}$, en choisissant la base de Kourou plutôt que celle de Cap Canaveral, avec $v_0 = 8$ km · s$^{-1}$. Commenter.

*f)* Quel(s) autre(s) avantage(s) présente la base de Kourou ?

### I.B.3) Mouvement d'un satellite

Un satellite de masse $m_F$ est en orbite autour de la Terre à la distance $r$ de son centre.

*a)* Donner l'expression de l'énergie potentielle $E_{p0}$ associée, en la choisissant nulle pour $r \to \infty$.

*b)* Montrer que la trajectoire est plane. Quelle est sa nature ?

La trajectoire est maintenant considérée circulaire.

*c)* Exprimer la vitesse $v_0$ de la fusée, ainsi que son énergie cinétique $E_{c0}$, en fonction de $\mathcal{G}$, $m_F$, $m_T$ et $r$.

*d)* Exprimer le rapport $\dfrac{T_0^2}{r^3}$, où $T$ représente la période de révolution du satellite, en fonction de $\mathcal{G}$ et $m_T$. Quel est le nom de cette loi ? Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant $r$ par $a$, demi-grand axe de l'ellipse.

*e)* Application numérique : calculer $v_0$ et $T_0$ pour une orbite circulaire basse ($r \simeq R_T$) .

*f)* Donner enfin l'expression de l'énergie mécanique de la fusée sous la forme $E_{m0} = -\dfrac{K}{2r}$, en précisant la valeur de $K$. Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant $r$ par $a$, demi-grand axe de l'ellipse.

Données : $G \times m_T = 4{,}0 \times 10^{14}$ m$^3$.s$^{-2}$ avec $m_T$ la masse de la Terre et $G$ la constante universelle de gravitation.

# II ... à la Lune.

## *II.A – Objectif Lune*

### II.A.1) Orbite de transfert

La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse $v_0$ à la vitesse $v_1$, de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où $d_{TL}$ représente la distance Terre-Lune (Figure 2).


**Figure 2** Orbite de transfert

*a)* Exprimer l'énergie mécanique $E_{m1}$ de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire.

*b)* En déduire l'expression de la vitesse $v_1$. Application numérique.

*c)* Où est placée la Terre par rapport à cette ellipse ? À quel instant doit-on allumer les moteurs ?

*d)* Évaluer numériquement la durée $t_1$ du transfert Terre-Lune (parcours de la moitié de l'ellipse). On donne $d_{TL} = 3{,}8 \times 10^8$ m.

### II.A.2) Orbite lunaire

Au voisinage de la Lune, de rayon $R_L$ et de masse $m_L$, l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable .

*L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.*

Les paramètres du vol sont calculés pour qu'en cas de panne des moteurs, la fusée contourne la Lune pour revenir sur la Terre. (Ce fut le cas lors de la mission Apollo XIII). À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.

*a)* Faut-il freiner ou accélérer ? Justifier qualitativement.

*b)* Déterminer numériquement $v_2$, vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune, avec $\mathcal{G} \times m_L = 4{,}9 \times 10^{12}$ m$^3 \cdot$ s$^{-2}$ et $R_L = 1{,}74 \times 10^3$ km.

Les données suivantes pourront être utiles :
- Masse d'un proton : $m_p = 1,7.10^{-27}$ kg
- Masse d'un électron : $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg
- Masse molaire de l'hydrogène : $M_{\mathrm{H}} = 1\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19}$ C
- Constante de Planck : $h = 6,6.10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$
- Énergie d'un photon de fréquence $\nu$ : $\mathcal{E} = h\nu$
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi 10^9}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$
- Constante gravitationnelle : $\mathscr{G} = 6,7.10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02.10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
- Pression standard $p^\circ = 1$ bar $= 10^5$ Pa
- Enthalpie standard de formation à $T = 298$ K : $\Delta_f H^\circ(\mathrm{H_2O_{(\ell)}}) = -285,83\ \mathrm{kJ\cdot mol^{-1}}$
- Capacités molaires standards :
  - $C_{p,m}{}^\circ(\mathrm{H_2O_{(\ell)}}) = 75,291\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$
  - $C_{p,m}{}^\circ(\mathrm{O_2}) = 29,355\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$
  - $C_{p,m}{}^\circ(\mathrm{H_2}) = 28,824\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$

## I. Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

On considère l'atome d'hydrogène $^1_Z\mathrm{H}$.

I.1. Quel est le numéro atomique $Z$ de l'atome d'hydrogène ? Préciser la composition de cet atome.

On étudie dans la suite le mouvement de l'électron autour du noyau de l'atome $^1_Z\mathrm{H}$.

La force électrostatique subie par l'électron est dirigée selon la droite proton-électron. Cette force attractive a pour intensité $F_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r^2}$, où $e$ est la charge élémentaire et $r$ la distance proton-électron.

I.2. L'interaction électrostatique est-elle toujours attractive ?

I.3. Exprimer l'intensité de l'interaction gravitationnelle $F_g$ subie par l'électron de la part du noyau. On notera $\mathscr{G}$ la constante gravitationnelle. Cette interaction est-elle toujours attractive ?

I.4. Calculer un ordre de grandeur du rapport $F_g/F_e$. En déduire que l'on peut négliger l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électrostatique.

I.5. Placer sur un schéma, représentant le système mécanique étudié, la force électrostatique qui s'exerce sur l'électron et la base mobile adaptée à l'étude de son mouvement.

Pour décrire l'atome d'hydrogène, Rutherford a utilisé un modèle planétaire dans le cadre de la mécanique newtonienne : l'électron a un mouvement circulaire, de rayon $r$, autour du noyau supposé fixe. Par la suite, on considérera le proton comme immobile dans un référentiel galiléen.

I.6. A partir de la relation fondamentale de la dynamique, montrer que le mouvement de l'électron est uniforme.

I.7. En déduire l'expression de la vitesse de l'électron $v$ en fonction de $\varepsilon_0$, $e$, $r$ et $m_e$.

I.8. Exprimer l'énergie cinétique de l'électron $\mathcal{E}_c$ en fonction de $\varepsilon_0$, $e$ et $r$.

I.9. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ associée à l'interaction électrostatique (On conviendra de choisir $\mathcal{E}_p$ telle que $\mathcal{E}_p(r \to \infty) = 0$).

I.10. Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de l'électron s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Commenter le signe.

Lors de l'étude de l'atome d'hydrogène, différents faits expérimentaux ont conduit Niels Bohr à formuler l'hypothèse suivante : l'électron ne peut se déplacer que sur certains cercles dont les rayons $r_n$ obéissent à la loi (quantification du moment cinétique) :

$$L = n\hbar$$

où :

- $L$ : moment cinétique de l'électron
- $\hbar$ : constante de Planck réduite, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1,055.10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
- $n$ : nombre entier $\geq 1$

I.11. Exprimer la norme du moment cinétique $L$ en fonction de $m_e$, $r_n$ et de sa vitesse $v_n$ sur le cercle de rayon $r_n$.

I.12. En déduire l'expression de $r_n$ en fonction des constantes $\varepsilon_0$, $e$, $\hbar$, $m_e$ et de $n$ puis en fonction de $r_1$ et $n$.

I.13. Déterminer l'expression de $\mathcal{E}_n$, énergie mécanique de l'électron sur le cercle de rayon $r_n$, en fonction de $\varepsilon_0$, $e$, $\hbar$, $m_e$ et de $n$. En déduire que $\mathcal{E}_n$ est de la forme :

$$\mathcal{E}_n = \frac{\mathcal{E}_1}{n^2}$$

On exprimera $\mathcal{E}_1$ en fonction de $\varepsilon_0$, $e$ et $r_1$.

I.14. Calculer $r_1$, puis calculer $\mathcal{E}_1$ en joule et en électronvolt ($1\,eV = 1,6.10^{-19}$ J).

## II. Spectre de l'atome d'hydrogène

II.1. Quelle est l'expression de la fréquence $\nu$ puis de la longueur d'onde $\lambda$ d'un photon émis lorsque l'électron passe d'un niveau d'énergie $\mathcal{E}_p$ à un niveau d'énergie $\mathcal{E}_n$ $(p > n)$ ?

En 1885, Joseph Balmer observe le spectre visible de l'atome d'hydrogène. Il constate que $1/\lambda$ est proportionnel à $\frac{1}{4} - \frac{1}{p^2}$ :

$$\frac{1}{\lambda} = R_h \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{p^2} \right)$$

II.2. Déterminer l'expression de $R_h$ en fonction de $\mathcal{E}_1$, $h$ et $c$.

II.3. À quelle valeur de $n$ la série de raies de l'atome d'hydrogène observée par Joseph Balmer correspond-elle ?

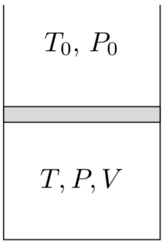
II.4. Déterminer les longueurs d'onde des raies de cette série pour $p$ allant jusqu'à 5. On prendra pour les applications numériques $R_h = 1,097.10^7$ m$^{-1}$.

II.5. Quel intervalle de longueurs d'onde définit habituellement le spectre visible ?

Niels Bohr (1885-1962), physicien Danois, prix Nobel de physique en 1922. Il fut l'un des principaux artisans de l'édification de la physique quantique.

Albert Einstein et Niels Bohr en 1930 à l'occasion d'un Congrès Solvay. (Photo de Paul Ehrenfest)

# Problème 3 : Comparaison entre transformations




On considère un système composé d'une quantité de matière $n$ de gaz parfait diatomique enfermée dans une enceinte. Cette enceinte est fermée par un piston de surface $S$ et dont on négligera la masse, pouvant coulisser sans frottement. L'ensemble est situé dans l'atmosphère, dont on note $T_0$ et $P_0$ la température et la pression. On note $I$ l'état initial. L'objectif est de comparer deux transformations du système : l'une brutale et l'autre lente.

*Donnée :* capacité thermique à volume constant $C_V = 5nR/2$.

Commençons par la transformation brutale : on lâche brusquement une masse $M$ sur le piston, qui se stabilise en un état intermédiaire 1.

**1 -** Le meilleur modèle pour la transformation est-il isotherme ou adiabatique ? Peut-on en déduire un résultat sur la température $T_1$ ?

**2 -** Déterminer la pression $P_1$.

**3 -** Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chacun des termes.

**4 -** En déduire les caractéristiques $T_1, P_1, V_1$ de l'état 1.

On observe qu'en fait l'état 1 n'est pas un réel état d'équilibre : le piston continue de bouger, mais beaucoup plus lentement, jusqu'à atteindre l'état 2 qui est l'état final.

**5 -** Quel phénomène, négligé précédemment, est responsable de cette nouvelle transformation du système ?

**6 -** Déterminer les caractéristiques $T_2, P_2, V_2$ de l'état 2.

**7 -** Déterminer le travail reçu par le système, puis sa variation d'énergie interne et en déduire le transfert thermique reçu au cours de la transformation $1 \to 2$. En déduire le travail total et le transfert thermique total reçus au cours de la transformation brusque.

Comparons maintenant à une transformation lente : la même masse $M$ est lâchée très progressivement sur le piston, par exemple en ajoutant du sable « grain à grain ».

**8 -** Comment qualifie-t-on une telle transformation ? Que peut-on en déduire sur la température du système au cours de la transformation ?

**9 -** Déterminer la pression dans l'état final et en déduire le volume. Commenter.

**10 -** Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chaque terme. Comparer à la transformation brutale. Commenter.

## Correction

$\boxed{1}$ La transformation étant brusque, on peut raisonnablement penser que les échanges thermiques n'ont pas le temps de se faire : **une modélisation adiabatique est la plus pertinente**. **On ne peut donc rien dire du tout** a priori sur la température dans le système.

$\boxed{2}$ Dans l'état 1, l'équilibre mécanique est atteint mais pas l'équilibre thermique. Le piston est soumis aux deux forces de pression et au poids de la masse $M$. En introduisant un axe $z$ orienté vers le haut, son équilibre se traduit par

$$P_1 S \vec{e}_z - P_0 S \vec{e}_z - M g \vec{e}_z = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}}$$

$\boxed{3}$ Le système (thermodynamique) considéré est le gaz parfait contenu dans l'enceinte. Au cours de la transformation $I \to 1$, il reçoit un travail $W_{I\to1}$ de la part du piston mais aucun transfert thermique car la transformation est adiabatique,

$$\boxed{Q_{I\to1} = 0\,.}$$

La transformation qu'il subit est monobare : tout au long de cette transformation, la pression extérieure est celle exercée par le piston sur le gaz qui est constante (la masse $M$ est déposée en bloc). Ainsi,

$$P_\text{ext} = P_0 + \frac{Mg}{S} \qquad \text{d'où} \qquad W_{I\to1} = -P_\text{ext}\Delta V \qquad \text{soit} \qquad \boxed{W_{I\to1} = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_1 - V_0)\,.}$$

Comme le gaz est parfait, son énergie interne varie de

$$\Delta U_{I\to1} = C_V \Delta T \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta U_{I\to1} = \frac{5}{2} nR(T_1 - T_0)\,.}$$

D'après le premier principe appliqué au système pendant la transformation $I \to 1$,

$$\Delta U_{I\to1} = W_{I\to1} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\frac{5}{2} nR(T_1 - T_0) = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_1 - V_0)}$$

$\boxed{4}$ La pression $P_1$ est déjà connue. Pour déterminer la température $T_1$, on peut remplacer les volumes par $V_i = nRT_i/P_i$ dans l'expression du premier principe. On trouve alors

$$\frac{5}{2} nR(T_1 - T_0) = -nRP_1\left(\frac{T_1}{P_1} - \frac{T_0}{P_0}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{T_1 = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{2} + \frac{P_1}{P_0}\right) T_0}$$

Le volume $V_1$ se déduit ensuite de la loi des gaz parfaits.

$\boxed{5}$ Les transferts thermiques entre le gaz contenu dans l'enceinte et l'extérieur au travers de la paroi de l'enceinte, sont responsables de cette transformation.

$\boxed{6}$ Dans l'état final, l'équilibre est complètement atteint. La condition d'équilibre thermique donne

$$\boxed{T_2 = T_0\,.}$$

Du point de vue de l'équilibre mécanique, rien n'a changé au cours de la transformation $1 \to 2$, donc

$$\boxed{P_2 = P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}\,.}$$

Enfin, le volume $V_2$ s'en déduit par la loi des gaz parfaits.

$\boxed{7}$ Le travail des forces de pression au cours de $1 \to 2$ se calcule comme précédemment,

$$W_{1\to 2} = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_1)\ ,$$

ainsi que la variation d'énergie interne qui se déduit d'une propriété de gaz parfait,

$$\Delta U_{1\to 2} = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1)\,.$$

Le transfert thermique reçu s'obtient alors par

$$\begin{aligned}
Q_{1\to 2} &= \Delta U_{1\to 2} - W_{1\to 2} \\
&= \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1) + \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_1) \\
&= \frac{5}{2} nR(T_0 - T_1) + \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_1) \\
&= -W_{I\to 1} + \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_1) \\
&= \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_0)
\end{aligned}$$

Finalement, le travail total et le transfert thermique total reçus au cours de la transformation brusque valent

$$W_{\text{tot}} = W_{I\to 1} + W_{1\to 2} = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_0) \qquad \text{et} \qquad Q_{\text{tot}} = 0 + Q_{1\to 2} = \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_0)$$

On remarque alors évidemment que $W_{\text{tot}} + Q_{\text{tot}} = 0$, ce qui s'explique par le fait que dans l'état initial $I$ et dans l'état final 2 le gaz est en équilibre thermique avec l'extérieur à la température $T_0$. Comme l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température, il est logique de trouver

$$W_{\text{tot}} + Q_{\text{tot}} = \Delta U_{\text{tot}} = 0\,.$$

$\boxed{8}$ La transformation est **quasi-statique**. On peut supposer qu'elle laisse largement le temps aux échanges thermiques d'avoir lieu, si bien que l'équilibre thermique est atteint à tout instant. Par conséquent, on peut considérer la transformation **isotherme** : tout au long de la transformation, $T = T_0$.

$\boxed{9}$ Dans l'état final $F$, la masse placée sur le piston est exactement la même que dans le cas précédent. On en déduit

$$\boxed{P_F = P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}}$$

et comme par ailleurs $T_F = T_0 = T_2$ la loi des gaz parfaits donne $V_F = V_2$. Ainsi, **l'état final $F$ de la transformation quasi-statique et le même que l'état final 2 de la transformation brusque**. Cela n'a rien d'étonnant : l'équilibre mécanique et thermique est établi dans les deux états 2 et $F$, et les contraintes imposées au système de l'extérieur (masse $M$ sur le piston, pression extérieure $P_0$ et température $T_0$) sont les mêmes. Lorsque l'équilibre est atteint, les mêmes contraintes extérieures conduisent au même état final, quel que soit les détails de la transformation amenant le système dans cet état.

**10** Comme la transformation est quasi-statique, à tout instant la pression $P$ dans le gaz est égale à la pression $P_{\text{ext}}$ imposée par le piston. Ainsi, le travail des forces de pression vaut

$$W \underset{\text{déf}}{=} \int_{IF} -P_{\text{ext}} \mathrm{d}V \underset{\text{quasi-stat}}{=} -\int_{IF} P \mathrm{d}V \underset{\text{iso}T\text{ GP}}{=} -nRT_0 \int_{V_I}^{V_F} \frac{\mathrm{d}V}{V}$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{W = -nRT_0 \ln \frac{V_F}{V_I}}$$

Par ailleurs, comme le système est constitué d'un gaz parfait, la variation d'énergie interne au cours de la transformation est nulle : l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de $T$ et la transformation est isotherme. Enfin, le transfert thermique reçu par le gaz au cours de la transformation $I \to F$ se déduit du premier principe,

$$\Delta U = W + Q \qquad \text{donc} \qquad Q = -W \qquad \text{soit} \qquad \boxed{Q = nRT_0 \ln \frac{V_F}{V_I}}$$

On voit ainsi que les deux transformations ont les mêmes états initial et final, donc la même variation d'énergie interne, alors que les échanges d'énergie ne sont pas les mêmes.